

ÜBERLEGUNGEN ZU EINER FORMALEN
DIALEKTISCHEN LOGIK

Uwe Petersen

1972

ÜBERLEGUNGEN ZU EINER FORMALEN DIALEKTISCHEN

LOGIK

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Philosophischen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität zu
München

vorgelegt von

Uwe Petersen
in München

1973



Referent: Prof. Dr. Krings

Korreferent: Dr. Baumgartner, Dr. Diller

Tag der mündlichen Prüfung: 20.12.1972

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung	1
Kapitel I : Die Antinomien als Ausgangspunkt	14
1. Abschnitt: Die mathematischen Antinomien	15
§1. Naive Mengenlehre	15
§2. Naive Kardinalzahltheorie	18
§3. Naive Ordinalzahltheorie	23
§4. Antinomien der naiven Mengenlehre	27
2. Abschnitt: Eine Betrachtung der ersten zwei Antinomien Kants	30
§5. Allgemeine Vorbemerkungen zu den Antinomien Kants	30
§6. Der Inhalt der beiden "mathematischen" Antinomien hinsichtlich eines Vergleichs mit den vorgestellten mathematischen Antinomien	32
§7. Möglichkeiten einer Interpretation der Antinomien Kants durch mengentheoretische Begriffe	40
3. Abschnitt: "Ursachen" der Antinomien	46
§8. "Logische Fehler" in der Bildung der Antinomien	46
§9. Technische Methoden zur Vermeidung der Antinomien	49
Kapitel II : Eine erste Möglichkeit, den Antinomien zu begegnen: Ausschluß der antinomischen Begriffe	53
1. Abschnitt: Der Versuch Kants einer wissenschaftlichen Begründung der Metaphysik	53
§10. Eine Abgrenzung des Begriffs der metaphysischen Erkenntnis bei Kant	54

§11. "Wie sind synthetische Urteile a priori möglich?"	56
§12. Eine Interpretation des Kantischen Versuches	65
2. Abschnitt: Der mathematische Weg	69
§13. Aussagenlogik mit Wahrheitswerten	70
§14. Ein formales System der Aussagenlogik	76
§15. Metatheoretische Sätze zur Aussagenlogik	78
§16. Prädikatenlogik	86
§17. Semantik der Prädikatenlogik	89
§18. Syntaktik und metatheoretische Sätze zur Prädikatenlogik	91
§19. Grundbegriffe der axiomatischen Mengenlehre	92
3. Abschnitt: Kritik am Kantischen Unternehmen einer Transzendentalphilosophie	96
§20. Bemerkungen zu einigen Fehldeutungen Kants im Rahmen seiner Transzendentalphilosophie	97
§21. Zur Hegelschen Kritik an Kant	101
Kapitel III : Eine zweite Möglichkeit, den Antinomien zu begegnen: Einschränkung der Urteilsstruktur	105
1. Abschnitt: Formale dreiwertige Logik	105
§22. Eine dreiwertige Aussagenlogik von Łukasiewicz	107
§23. Ein Vorschlag von F.G. Asenjo	111
§24. Ein Änderungsvorschlag zu Asenjós "Calculus of Antinomies"	115
2. Abschnitt: Formale Logik mit Widersprüchen	117
§25. Syntaktisch - analytisch	118
§26. Aussagenlogik	124
§27. Prädikatenlogik	135

Einleitung

E.1 Zum Begriff der Metaphysik (vgl. Stegmüller (1))

E.1.1 Eine Bestimmung des Begriffs der Metaphysik von der Gegenstandsseite her trifft auf folgende Schwierigkeiten:

E.1.1.1 Die Bestimmung der Metaphysik als Wissenschaft derjenigen "Dinge", die jenseits aller Erfahrung liegen, fällt A) zu eng aus, da a) konkrete Gegenstände der sinnlichen Anschauung einer metaphysischen Betrachtung unterliegen können, b) die Reichweite der Erfahrungswissenschaften, und damit die Grenze der Erfahrung nicht festliegt, und so ehemalige Fragen der Metaphysik in das Gebiet der Naturwissenschaften rücken können; sie fällt B) zu weit aus, da zu den "Dingen", die jenseits jeder Erfahrung liegen auch solche gehören, die eindeutig in den Bereich einer anderen Wissenschaft zu verlegen sind (transfinite Zahlen der Mathematik).

E.1.1.2 Die Einbeziehung von Gegenständen der Erfahrungswelt macht eine Abgrenzung der Metaphysik von den Naturwissenschaften unmöglich.

E.1.2 Die Kantische Bestimmung der Metaphysik von der Urteilsseite her, als den Versuch eines Systems lauter synthetischer Urteile a priori, scheiterte A) an der schlechten Unterscheidbarkeit von analytischen und synthetischen Urteilssätzen, B) an dem Aufweis der Mathematiker (Frege, Logizismus), daß die Einschätzung der Mathematik als synthetische Wissenschaft unhaltbar ist.

E.1.3 Die Schwierigkeiten, die bei der Bestimmung der Begriffe "synthetisch" und "analytisch" auftauchen, veranlaßten Stegmüller (1), Metaphysik und Einzelwissenschaften durch die Arten der in ihnen herangezogenen Einsichten zu unterscheiden. Die Einsicht, auf die sich die Metaphysik stützt, ist die Evidenz. Das Evi-

denzproblem stellte sich aber für Stegmüller als unentscheidbar heraus.

E.1.4 Im folgenden wollen wir Metaphysik zunächst gekennzeichnet sehen durch ihre eigenartige Fragestellung nach dem Seienden als solchem, das heißt, wir unterscheiden die Metaphysik von den anderen Wissenschaften durch die Art, wie sie ihren Gegenstand betrachtet. Dieser Gegenstand sei grundsätzlich nicht in bestimmter Weise klassifiziert, ebenso sei ihre Art der Einsicht nicht festgelegt.

E.2 Metaphysik als Wissenschaft

E.2.1 Der Anspruch der Metaphysik auf den Beinamen Wissenschaft wurde von Kant aufs härteste bestritten. Er spricht einem System, sofern es sich als Metaphysik im fertigen Zustand versteht oder sich so bezeichnet, die Wissenschaftlichkeit ab, beziehungsweise behauptet, Metaphysik (als Wissenschaft) sei niemals getrieben worden. Daß Metaphysik im "alten Stil" widersprüchlich war und ist, sofern sie heute noch so geführt wird, vermochte er durch Aufzeigen der Antinomie der reinen Vernunft überzeugend darzulegen. "Alter Stil" meint dabei ein Zweifaches, A) rein spekulative Erkenntnis, B) deren "Ergebnisse" in Urteilsform dargestellt sind.

E.2.2 Von hier zeigen sich zwei Möglichkeiten, die Metaphysik durch Ablegen überkommener Formen auf einen wissenschaftlichen Weg zu führen:

E.2.2.1 Man vermeidet das rein spekulative Moment der metaphysischen Erkenntnis und verfährt nach dem Grundsatz, daß der Verstand die Erfahrung nicht überfliegen dürfe.

E.2.2.2 Man behält die rein spekulative Erkenntnisform bei, und ändert die Urteilsstruktur der metaphysischen Behauptungen, indem man deren strikte Einseitigkeit

einschränkt.

Der Kampf Kants gegen die Unwissenschaftlichkeit der alten Metaphysik weist uns auf die grundlegenden Schwierigkeiten, denen man in der Metaphysik immer begegnet.

E.3 Die Schwierigkeiten der Metaphysik

E.3.1 Bekanntlich bieten metaphysische Begriffe zwei grundsätzliche Schwierigkeiten:

E.3.1.1 Es gibt kein empirisches Entscheidungsverfahren (Nachweis im naturwissenschaftlichen Sinn, Experiment) zur Feststellung der Wahrheit oder Falschheit einer Behauptung mit metaphysischen Inhalten, das heißt, es gibt kein Kriterium, ob ein Prädikat auf einen metaphysischen Begriff zutrifft oder nicht. Einen Aussagesatz mit einem metaphysischen Begriff an der Subjektstelle läßt sich, in Ermangelung eines direkt vorliegenden, prüfbaren Gegenstandes als Subjekt, nur durch einen "Beweis" verifizieren (im Unterschied zum Nachweis durch rein rationale Begründung, ohne Berufung auf die "Wirklichkeit" als Erfahrungshintergrund).

E.3.1.2 Die eigentliche Schwierigkeit der Metaphysik zeigt sich bei der Feststellung, daß sich für gewisse metaphysische Begriffe Widersprüche derart ergeben, daß die Existenz und die Nichtexistenz des im Begriff Bezeichneten beweisbar sind.

Allgemein gilt, daß sich mit bestimmten metaphysischen Begriffen an der Subjektstelle einfacher Aussagesätze Widersprüche derart ergeben, daß die Behauptung "A und non A" beweisbar ist (wobei A den Aussagesatz bezeichnet).

E.3.2 Da die Frage der Metaphysik eine totale ist, nämlich nach dem Seienden als solchem, kann es ihr nicht erlaubt sein, unbefragte Voraussetzungen als Grundlage ihrer Beweise anzunehmen. So ist die Schwierigkeit in diesem Punkt auf die Frage Hegels ausgedehnt: "Womit

muß der Anfang der Wissenschaft gemacht werden?"

E.3.3 Es ist der Metaphysik nie gelungen, so etwas wie Axiome in ihrer "Wissenschaft" zu finden, oder auch nur sich auf allgemeine Grundlagen zu einigen. Metaphysik kann ihre Voraussetzungen nur durch die Wissenschaft, die sie selbst ist oder sein will beweisen. Diese zirkelhafte Struktur des Vorgehens findet sich bei Heidegger (1) bestimmt und angewandt: "Zuvor Seiendes in seinem Sein bestimmen und auf diesem Grunde dann die Frage nach dem Sein erst stellen ..." (S.7)

E.3.4 Metaphysik in dieser, ihr ganz wesentlichen Vor- und Rückbezüglichkeit hat die erste Bedingung einer genauen Beweisführung abgelehnt, die klare Abgrenzung der Voraussetzung. Die zweite Bedingung, die Einigung auf zugelassene Schlußregeln bleibt in ähnlicher Weise unerfüllt. Als Hintergrund für metaphysische Beweise dient im allgemeinen nur die intuitive Einsicht. Da es aber entsprechend der verschiedenen Arten intuitiver Einsicht auch zu verschiedenen Wertungen der "Beweise" kommt, andererseits aber jede Einsicht sich als solche, das ist wahre Einsicht versteht, ist es noch zu keiner allgemein anerkannten metaphysischen Wissenschaft gekommen. Dem entspricht, daß es in der Metaphysik keine kontinuierliche Entwicklung von Theorien gibt.

E.3.5 Dieser grundsätzliche Mißstand war ein Anlaß für Kant, der herkömmlichen Metaphysik jeden wissenschaftlichen Anspruch streitig zu machen und ihr seine Kritik entgegenzusetzen. Die widersprüchliche Natur des metaphysischen Unterfangens zeigte sich bis dahin eher in der Ausbildung verschiedener, von einander unabhängigen aber sich widersprechender Theorien. Mit der Schaffung genauer theoretischer Grundlagen für eine Metaphysik durch Kant, tauchen die Widersprüche in einem System auf, womit erstmalig die eigentliche Schwierigkeit der Metaphysik genau bezeichnet ist. Widersprüchlich ist

die Metaphysik nicht nur in ihren verschiedenen Erscheinungsformen, sondern schon auf der Grundlage eines Systems.

E.4 Zum Begriff des Beweises und des Widerspruchs

E.4.1 Beweise finden sich erstmalig und völlig unvermittelt in der Überlieferung der griechischen Mathematik. Sie unterstreichen den apriorischen Charakter, den Mathematik als griechische Wissenschaft von allem Anfang an gehabt hat. Die mathematischen Werke jener Zeit zeigen den gleichen Aufbau: Definition, Satz, Beweis (vgl. van der Waerden (1)).

Der Gedanke des Beweises führt bald zum Gedanken der Axiomatik. Beweise stehen in einem System von Voraussetzungen und Schlußregeln. Die ersten Voraussetzungen, die am Anfang der Wissenschaft stehen, heißen seit damals Axiome.

Der Begriff des Nachweises soll durch seinen empirischen Charakter grundlegend vom Begriff des Beweises unterschieden sein.

E.4.2 Von diesem Unterschied her läßt sich auch der Begriff des Widerspruches zergliedern. Wir wollen zwischen Antinomie und Paradoxie unterscheiden:

E.4.2.1 Der ausschließende Widerspruch zwischen zwei beweisbaren Sätzen soll "Antinomie" heißen.

E.4.2.2 Der Widerspruch zwischen Ergebnissen einer Theorie und der Evidenz der Anschauung oder der Erfahrung soll "Paradoxie" heißen.

Läßt sich mit einer Theorie ein Widerspruch herleiten, so hält man im allgemeinen diese Theorie für widerlegt. Eine generelle Ablehnung erfährt eine Theorie, in der sich Antinomien bilden lassen, eine Ablehnung hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit, wenn sich Paradoxien ergeben. In einer formalen Theorie, in der die Anwendbarkeit in dem Bereich der Erfahrungswissenschaften eine nachgeordnete Frage ist, spielt natürlich nur die Freiheit von

Antinomien eine Rolle.

E.4.3 Antinomien und Paradoxien sind seit der griechischen Antike bekannt. Zu den Antinomien gehören der "Krokokilschluß" und der "Lügner", zu den Paradoxien die vier "Beweise" des Zeno, daß Bewegung unmöglich sei. Unter der Voraussetzung der Einheit des Seins sind die Ausführungen des Zeno als Beweise zu betrachten. Die Entgegnung des Diogenes von Sinope ist dagegen ein Nachweis zu nennen, daß Bewegung möglich ist. Da sich in der Metaphysik für gewöhnlich niemand die Mühe macht, seine "Beweise" im Rahmen eines klaren Systems von Voraussetzungen und Schlußregeln zu führen, ist es schwierig zwischen Nachweisen und Beweisen zu unterscheiden. Uns sollen im folgenden nur Beweise interessieren, und dementsprechend auch nur die Widersprüche, die sich aus beweisbaren Sätzen ergeben: Antinomien.

E.5 Zur Antinomie der Metaphysik

E.5.1 Die Fragestellung der Metaphysik ist als eine allumfassende gekennzeichnet. Daher kann es ihr nicht erlaubt sein, Festsetzungen zu treffen, die ihrerseits nicht mehr in Frage gestellt werden (vgl. E.3.2). Es scheint möglich, die antinomische Eigenschaft der Metaphysik aus dieser eigentümlichen Struktur zu deuten. Antinomien, aufgefaßt als die Widerlegung jeder Möglichkeit einer reinen Vernunfterkennung, sollen daher unser Ausgangspunkt sein.

E.5.2 Die Untersuchungen von Kant (1) haben gezeigt, daß eine Metaphysik im herkömmlichen Sinn widersprüchlich sein muß, da die bekannten Antinomien auftauchen. Die Ausführungen Kants erwecken den Verdacht, daß die Antinomien aus dem spekulativen Charakter der betreffenden antinomischen Begriffe resultieren. Andererseits kennen wir Antinomien, in denen der antinomische Begriff nichts "spekulatives" an sich hat. Der Anfang

der Welt liegt sicherlich jenseits unserer direkten sinnlichen Wahrnehmung, der Barbier jedoch, das Beispiel der Russellschen Antinomie, scheint mehr aufgrund seiner eigenartigen Definition in die Menge der widersprüchlichen Begriffe geraten zu sein, als durch eine ihm inhärente metaphysische Eigenschaft. Der Barbier ist schon vor jedem Definitionsversuch "da", er wird durch die Definition nicht erst angenommen, um dann aus seinen Definitionseigenschaften heraus widerlegt zu werden. Wir haben damit eine Antinomie und eine Paradoxie vorliegen.

Wir versuchen, ob sich, im Rahmen der kantischen Genauigkeit, die Antinomie vom Anfang der Welt durch das "zirkuläre" Definitionsprinzip der Russellschen Antinomie darstellen läßt. Es soll sich ergeben, daß die Spekulativität des antinomischen Begriffes weder notwendige noch hinreichende Bedingung für die Antinomie ist, und daß die zirkelhafte Struktur der Definition wahrscheinlich notwendige und hinreichende Bedingung ist.

E.6 Eine vorläufige Begriffsbestimmung der Metaphysik

E.6.1 Hegel hat für beide Momente der Metaphysik, die zirkelhafte Struktur und die Widersprüchlichkeit ihrer Aussage eine Vereinigung geschaffen. Während eine wissenschaftliche Metaphysik durch das Auftauchen von Antinomien grundsätzlich in Frage gestellt schien, verschiebt sich nun mit Hegel das Bemühen der Metaphysik. Es geht nicht mehr darum, feste Aussagen spekulativer Natur zu machen und festzuhalten, sondern die eigentümliche Bewegung jeder vereinzelt spekulativen Aussage in ihr logisches Gegenteil, die Dialektik, zu verfolgen und zu beschreiben.

E.6.2 So wollen wir die Metaphysik nicht gekennzeichnet sehen durch die besonderen Begriffe, die ihren Inhalt bilden, sondern A) durch die eigenartige Frageweise nach ihrem

Gegenstand, der grundsätzlich beliebig sein kann, B) durch Widersprüchlichkeit ihrer Begriffsbestimmungen. Wenn wir Philosophie allgemein als die "methodische Arbeit des Denkens, durch welche des Seiende erkannt werden soll" (Windelband/Heimsoeth, Lehrbuch der Geschichte der Philosophie S.1) nehmen, dann müssen wir zugeben, daß es viele Philosophien gibt, die jeweils nach den Seienden, die ihren Inhalt ausmachen, unterschieden sind. Die Metaphysik als "Erste Philosophie" begründet ihre Stellung nicht wie die anderen Philosophien durch die Wahl ihres Gegenstandes, sondern durch die Wahl der Fragestellung. Die genaue Struktur dieser Fragestellung werden wir später noch untersuchen und deuten, indem wir ihre vermutliche Wirkung, nämlich die Antinomien, einer mengentheoretischen Betrachtung unterziehen. Jedenfalls wissen wir, daß naturwissenschaftliche Sätze von metaphysischen durch die Eigenschaft naturwissenschaftlicher Sätze unterscheidbar sind, grundsätzlich falsifizierbar zu sein, wogegen metaphysische Behauptungen nicht (grundsätzlich?) falsifizierbar sind, da sich mit einer Behauptung gegebenenfalls auch die Gegenbehauptung beweisen läßt, und es andererseits keine experimentelle Erfahrung geben muß (vgl. Kant (2) §42).

E.6.3 Das zirkelhafte Vorgehen der Metaphysik bestimmt auf eigene Weise das Verhältnis eines lernenden Bewußtseins zu seinem Objekt. Der betrachtete Gegenstand kann dabei beliebig sein. Wir wollen nun den Lern- oder Forschungsprozeß als Modell der metaphysischen Fragestellung interpretieren. Dazu müssen wir annehmen, daß der zu erforschende Gegenstand außerhalb des Erfahrungskreises des forschenden Bewußtseins liegt. Die Definition, die diesen Gegenstand zu erfassen trachtet, wird versuchen, ihn durch eine Relation zur Gesamtheit der Dinge seiner Erfahrung zu bestimmen, mit dem Ziel, den zu erforschenden Gegenstand in den Kreis der Erfahrungsdinge einzugliedern. Dieser Vorgang wird aber

mit seinem Gelingen, das ist die Eingliederung in die Erfahrung, zirkelhaft, da nunmehr der neue Gegenstand zur Gesamtheit der Erfahrungsdinge gehört. Die Schwierigkeiten, die sich aus diesem Definitionsverfahren ergeben können (Antinomien), spielen natürlich nur für solche Wissenschaften eine Rolle, die manchmal darauf angewiesen sind, eine solche Definition beizubehalten, weil ihnen nur dadurch der Gegenstand gegeben ist; das sind zum Beispiel Mathematik und Metaphysik, beide sofern ihr Gegenstand außerhalb der sinnlichen Erfahrung liegt.

E.6.4 Zusammenfassend wollen wir für die kommenden Ausführungen folgende dreiteilige Bestimmung des Begriffes der Metaphysik akzeptieren:

- E.6.4.1 Die Metaphysik ist von ihrer Absicht her durch den Versuch bestimmt, Seiendes als solches zu erfassen.
- E.6.4.2 Sie ist von ihrer Methode her durch die zirkelhafte Struktur des Vorgehens bestimmt.
- E.6.4.3 Sie ist von ihrer Erscheinungsform her als diejenige Wissenschaft bestimmt, die antinomischen Begriffen eine bestimmte Stellung in ihrem System zubilligt.

E.7 Zum Gebrauch einer formalen Sprache

E.7.1 Es herrscht für gewöhnlich die Auffassung, daß aus der vorstehenden Kennzeichnung der Metaphysik folge, daß die "formale Methode", die wesentlich als eine den Naturwissenschaften und der Mathematik entlehene erscheint, nicht zum Ausdruck metaphysischer Überlegungen geeignet sei.

Wäre dies tatsächlich der Fall, könnten auch die Sätze der normalen Umgangssprache, die im allgemeinen herangezogen werden, nicht zu diesem Zweck besser beschaffen sein, denn außer einer ständigen Vagheit des Ausdrucks und der Schlußweise finden sich keine Unterschiede hinsichtlich der Endlichkeit der Feststellungen.

Bei Hegel (1) finden wir den deutlichsten Ausdruck für diese Schwierigkeit, die sich für jede Sprache ergibt, wenn sie sich anschickt, spekulative Wahrheiten mitzuteilen. Mathematik als Methode lehnt er für die Philosophie ab, denn jede Entwicklung oder Bewegung und insbesondere die Beweise sind den mathematischen Sätzen nicht inhärent, sondern von außen an sie herangetragen (vgl. Hegel (1) S.40). Andererseits muß er zugeben, daß der Satz in Form eines Urteils ebensowenig geeignet sei, spekulative Wahrheiten auszudrücken. Trotzdem haben seine spekulativen Sätze die normale Gestalt von Urteilsätzen. Der Anspruch auf die Fähigkeit spekulative Wahrheiten zu vermitteln ist von außen herangebracht. Das läßt sich leicht an den vielen Mißverständnissen, denen sich Hegel durch einseitige Zitatauswahl ausgesetzt sieht, ermessen. Die Bewegung eines Satzes der Dialektik Hegels erfolgt immer erst durch den darauffolgenden; es ist grundsätzlich möglich, bei einem Satz Hegels stehenzubleiben. Die Bewegung geschieht nicht als Entwicklung aus dem Inneren des Satzes, sondern kommt in Gestalt einer Entgegensetzung des logischen Gegenteils des ersten Satzes. Beide Sätze aber, die sich hier in scheinbarer Unversöhnlichkeit gegenüberstehen, haben die gewohnte Form der Urteilssätze: Ein Prädikat kommt einem Subjekt zu.

E.7.2 Dialektik in reinster, unmittelbarster Weise ist die Bewegung selbst. Dialektik unmittelbar nehmen heißt demnach sich zu bewegen und damit Dialektik sein lassen. Der Schritt aber, Dialektik begrifflich zu fassen heißt wiederum Dialektik, und es liegt im Wesen der Dialektik, daß der ersten, unvermittelten Dialektik nichts genommen und nichts hinzugefügt wurde, indem sie auf die begriffliche Ebene gebracht wurde. Die Kennzeichnung der Dialektik liegt in ihrer Fähig-

keit, ihre eigene Entwicklung in der Begrifflichkeit je schon immer als die ihre ergriffen zu haben. Der Versuch jedoch, Dialektik in einer bestimmten Begrifflichkeit festzuhalten fällt zwar, als Stadium einer Entwicklung, nicht aus der Dialektik als Erklärung heraus, ist aber als Element der Dialektik nicht Dialektik selbst.

E.7.3 Mathematik ist nicht mehr, wie noch Hegel ((2) S.84) gemeint hat, die "Wissenschaft der endlichen Größenbestimmungen". Die Griechen hatten als erste entdeckt, daß es auf einer endlichen Strecke Punkte gibt, die nicht durch eine endliche Anzahl von rationalen Schritten (Annäherung durch Brüche) dargestellt werden können. Indem die Mathematik die Schwierigkeiten, die daraus entstanden sind, zu bewältigen verstand, ist sie die Wissenschaft vom Unendlichen zu nennen (vgl. Weyl (1)). Sie hat auch entdeckt, daß das inhaltlich-logische Schließen zu Fehlern führt, wenn es auf beliebige abstrakte Begriffsbildungen angewendet wird (vgl. Hilbert (1)).

Da die Forderungen der Metaphysik jede endliche Sprache übersteigen, und jede Sprache ist naturgemäß endlich, müssen wir das "Vorhaben Metaphysik" grundsätzlich neu beginnen. Wir wollen dazu den einfachen Versuch machen, mathematische Ergebnisse und Theorien, die Bedeutung für unendliche Mengen erlangt haben, in der Fragestellung der Metaphysik zu verwenden. Wir werden uns daher im folgenden stark an die formale Denkweise der Mathematik annähern müssen. Dies geschieht jedoch, ohne daß wir die Metaphysik in ihren Absichten verletzen müssen, was nicht damit gleichzusetzen ist, daß der Anspruch auf die gewohnte sprachliche Darstellung nicht verletzt werden solle.

E.8 Vorbemerkungen zur "formalen Methode"

E.8.1 Wir wollen in folgender Weise zwischen Theorie und Me-

tatheorie unterscheiden: Wir nehmen in der Theorie ausdrücklich "keine maßgebliche Rücksicht" auf das, was man gemeinhin mit "Wirklichkeit" bezeichnet; nicht weil wir keine "Existenz der Wirklichkeit" anerkennen wollen, sondern weil wir keine Theorie der Erkenntnis vorliegen haben. Dabei bedeutet "keine maßgebliche Rücksicht" nicht, daß wir den intuitiven Hintergrund bestreiten wollen, sondern daß eine einmal getroffene Definition nicht durch einen Rückgriff auf die eigentliche "Bedeutung" des Definierten verändert werden soll. In diesem Sinne können Definitionen weder "wahr" noch "falsch" sein, wie Kant (1) sagt: "Mathematische Definitionen können niemals irren. Denn, weil der Begriff durch die Definition zuerst gegeben wird, so enthält er gerade nur das, was die Definition durch ihn gedacht haben will" (S.672). Das heißt, daß Definitionen formal sein sollen in dem Sinne, daß sie nicht darauf bestehen, Begriffe in ihrer "wirklichen Bedeutung" zu erfassen. Daß formale Theorien trotzdem auf die "Wirklichkeit" anwendbar sind zeigt die Mathematik zur Genüge.

- E.8.2 Die Schwierigkeit der Geometrie, den "Punkt" inhaltlich eindeutig durch eine Definition zu bestimmen führte zu dem, was man "implizite Definition" nennt. Die Eigenschaften des "Punktes" werden im Rahmen der Axiome festgelegt. Der "Punkt" ist dadurch jedoch nicht eindeutig bestimmt, trotzdem bleibt die Geometrie eine Wissenschaft, die in der Erfahrungswelt eine Anwendung erfährt.
- E.8.3 Allgemein fordern wir also, daß in der Theorie der Rückgriff auf die "eigentliche Aussage" oder den "tatsächlichen Gehalt" eines Begriffes unerlaubt sei. Wir verbieten also eine sonst in der Metaphysik gern gebrauchte Schlußweise, die einen Übergang von der Theorie auf die Metatheorie gestattet, um dann metatheo-

retische Voraussetzungen als "Bedingungen" der Theorie hinzustellen.

- E.8.4 Bei dieser Festsetzung wollen wir uns jedoch bewußt sein, daß sie selbst ihren Anspruch auf die "Wirklichkeit" nicht verleugnen kann. Soll sie trotzdem in der Theorie Bedeutung gewinnen, müssen wir sie als eine Art Axiom betrachten, um für dieses eine Mal den Zugang von der Metatheorie in die Theorie zu sichern.

K a p i t e l I

DIE ANTINOMIEN ALS AUSGANGSPUNKT

Die Konjunktion zweier beweisbarer Aussagesätze A und B , wobei jeder der beiden Sätze die logische Negation des anderen ist, nennen wir eine Antinomie (vgl. E.4.2). Für jeden der beiden Sätze gilt, daß er entweder wahr oder falsch ist. Angenommen A ist wahr, dann muß B , als Negation von A , falsch sein und umgekehrt. In jedem Fall ist also ein Glied der Konjunktion, und so die Konjunktion selbst, falsch.

Nach dem Prinzip "ex falso quodlibet" ist damit in einem antinomischen System, also einem System, in dem auf Grund gewisser Axiome Antinomien herleitbar sind, jeder beliebige, also auch jeder falsche Satz beweisbar. Es ist klar, daß das Auftauchen von Antinomien (Inkonsistenz) die Grundannahmen eines wissenschaftlichen Lehrgebäudes, und damit dies Lehrgebäude selbst, wertlos werden läßt.

In der mathematischen Disziplin der Mengenlehre sind gegen Ende des letzten Jahrhunderts Antinomien aufgetreten. Dies wog um so schwerer, als einerseits die Mathematik als gesichertste Wissenschaft galt, andererseits die Mengenlehre als Grundlage aller anderen mathematischen Theorien auftreten kann. Es ist in der Mathematik gelungen, die Axiome der Mengenlehre so zu verändern, daß ihre Ergebnisse weiterhin beweisbar, die bekannten Antinomien jedoch nicht mehr herleitbar sind.

Die Philosophie kennt Antinomien seit der Antike. Eine Theorie der Erkenntnis, in der diese geschichtliche Tatsache als zwangsläufiges Ergebnis des Denkens der Vernunft erscheint, ist Kants "Kritik der reinen Vernunft". Wir wollen im folgenden sehen, ob sich aus dem Antinomienproblem Möglichkeiten

ten für die Metaphysik ergeben, sich mathematische Methoden und Ergebnisse zunutze zu machen.

Um die Kantischen Antinomien genauer formulieren zu können, führen wir im folgenden Abschnitt zunächst einige Grundbegriffe der naiven (nicht-axiomatischen) Mengenlehre ein, mit deren Hilfe sich in der Mathematik erstmalig Antinomien ausdrücken ließen.

1. Abschnitt: Die mathematischen Antinomien

Man kann die Mengenlehre als Theorie des "Aktual-Unendlichen" bezeichnen (Wittenberg (1) S.71). Es erstaunt deshalb nicht weiter, daß sie zunächst in einer Form auftritt, die die Bildung von Antinomien erlaubt. Antinomien scheinen das Vorrecht jener Wissenschaften zu sein, die das Endliche zu überschreiten suchen. Die Mathematik hat jedoch gegenüber der Metaphysik, dem ältesten Versuch das Endliche, Diesseitige aus dem Unendlichen, Jenseitigen zu begründen, den Vorteil, daß sie ihre Begriffe an einem Gegenstand erproben konnte, der ungleich mehr einer Überwachung im Endlichen zugänglich ist als jeder Begriff der Metaphysik; dieser Gegenstand ist die Zahl.

Die Mengenlehre leistet nun die Erweiterung des endlichen Zahlbegriffes auf unendliche Größen. Dies geschieht mit Hilfe des Mengenbegriffes.

§ 1. Naive Mengenlehre

- 1.1 Cantor, der Begründer der Mengenlehre, beschrieb den Begriff der Menge als "eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen".

Wir unterscheiden daher in der naiven Theorie zwei Grundprinzipien zur Bildung von Mengen:

1. Liegen endlich viele Objekte $a_1, \dots, a_n$ vor (d.h. n ist eine natürliche Zahl), so lassen sich diese zu einem Ganzen zusammenfassen, welches dann eine Menge heißt und $\{a_1, \dots, a_n\}$ geschrieben wird.
2. Durch eine gegebene Aussage läßt sich eine Menge beschreiben (Komprehensionsprinzip). Für jedes vorgelegte Objekt kann man nun entscheiden, ob es zur Menge gehört oder nicht, indem man überprüft, ob die vorgegebene Aussage darauf zutrifft. Auf diese Weise lassen sich auch unendliche Mengen (Mengen mit unendlich vielen Objekten) definieren.

Wenn also $A[x]$ eine Aussage ist, die auf x zutrifft, dann ist $\{x: A[x]\}$ die Menge aller der x , auf die die Aussage $A[x]$ zutrifft.

- 1.2 Die in einer Menge zusammengefaßten Objekte heißen die Elemente der Menge; das Prädikatzeichen $\in$ bezeichnet die Grundrelation des Enthaltenseins eines Objektes in einer Menge:

Für "a ist Element der Menge M" schreiben wir $a \in M$.
Für die Negation "a ist nicht Element der Menge M" schreiben wir $a \notin M$.

$a \in \{x: A[x]\}$ genau dann, wenn gilt $A[a]$.

$a \in \{a_1, \dots, a_n\}$ genau dann, wenn gilt $a = a_1$ oder $a = a_2$ oder ... oder $a = a_n$.

- 1.3 Daraus ergeben sich zwei Grundeigenschaften von Mengen:

1. Es kommt nicht auf die Reihenfolge der Elemente einer Menge an.
2. Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie gleiche Elemente haben (Extensionalität von Mengen).

1.4 Einige Grundoperationen und Grundrelationen zwischen Mengen:

1. $M \cap N := \{x : x \in M \text{ und } x \in N\}$ ist die Menge der Elemente, die M und N gemeinsam haben (Durchschnitt von M und N).
2. $M \cup N := \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\}$ ist die Menge der Elemente, die in M oder in N vorkommen (Vereinigung von M und N).
3. $M \setminus N := \{x : x \in M \text{ und } x \notin N\}$ ist die Menge der Elemente von M, die nicht in N vorkommen (Komplement von N bezüglich M).
4. $M \subseteq N$ gelte nach Definition dann und nur dann, wenn jedes Element x aus der Menge M auch in N als Element enthalten ist; in Zeichen:

$$M \subseteq N \quad :\Leftrightarrow \quad (x \in M \Rightarrow x \in N) \quad (M \text{ ist Teilmenge von } N)$$

Insbesondere gilt $M \subseteq N$, wenn $M = N$. Soll $M = N$ ausgeschlossen werden, so schreiben wir $M \subset N$ (M ist echte Teilmenge von N).

5. $P_M := \{x : x \subseteq M\}$ ist die Potenzmenge von M, das ist die Menge aller Teilmengen von M.

1.5 Definitionen:

1. M und N seien Mengen. $\{M \times N\}$ ist die Menge der geordneten Paare (m, n) mit $m \in M$ und $n \in N$ und heißt das kartesische Produkt von M und N.
2. Eine zweistellige Relation ist eine Teilmenge von $\{M \times N\}$. Für $(m, n) \in R$ ((m, n) ist aus der Relation R) schreiben wir $m R n$ und sagen m steht in der Relation R zu n. (Beispiel einer Relation ist 1.4.4)
Gilt $M = N$, so sprechen wir von einer Relation auf M.
3. Eine Relation R auf einer Menge M heißt eine

Äquivalenzrelation, genau dann, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

- (i) aRa ($a \in M$) Reflexivität
- (ii) Aus aRb folgt bRa ($a, b \in M$) Symmetrie
- (iii) Aus aRb und bRc folgt aRc ($a, b, c \in M$) Transitivität

4. Eine Relation f heißt eine Funktion, wenn gilt:

Aus $(a, b) \in f$ und $(a, c) \in f$ folgt $b = c$ (Eindeutigkeit)

Für $(a, b) \in f$ schreiben wir $b = fa$.

5. Eine Funktion f heißt eineindeutig, wenn gilt:

Aus $(a, b) \in f$ und $(c, d) \in f$ mit $a \neq c$ folgt $b \neq d$.

In der Mengenlehre wird auf zwei Arten der Begriff der "Größe" einer Menge auf unendliche Mengen erweitert, so daß die Menge der unendlichen Mengen nach der Größe ihrer Elemente wiederum unterscheidbar ist.

Man vergleicht einmal die "Anzahl" der Elemente zweier Mengen, ohne auf die Reihenfolge der Elemente Rücksicht zu nehmen und gelangt so zu den Kardinalzahlen.

Zum andern geht man von der intuitiven Vorstellung des Abzählens aus, wodurch die Elemente einer Menge in gewisser Weise geordnet werden, und gelangt so zu den Ordinalzahlen.

Im folgenden Paragraphen machen wir uns mit den Grundbegriffen der Kardinalzahltheorie vertraut.

§ 2. Naive Kardinalzahltheorie

2.1 Definition der Äquivalenz zweier Mengen M und N :

Zwei Mengen M und N heißen äquivalent, in Zeichen $M \approx N$, genau dann, wenn es eine eindeutige Funktion f von M auf N gibt.

2.2 Die Relation der Äquivalenz zweier Mengen ist eine Äquivalenzrelation (1.5.3):

1. Reflexivität: $M \approx M$ Die Zuordnung jedes Elementes von M zu sich selbst ist eine eindeutige Funktion von M auf M : $x = fx$ für alle $x \in M$.

2. Symmetrie: Aus $M \approx N$ folgt $N \approx M$

Aus $M \approx N$ folgt, daß es eine eindeutige Funktion f von M auf N gibt; das bedeutet:

Aus $(a,d) \in f$ und $(a,d) \in f$ folgt $b = d$ (1.5.4)

Aus $(a,c) \in f$ und $(b,c) \in f$ folgt $a = b$ (1.5.5)

Dabei sind a, b aus M und c, d aus N .

Für (x,y) f sei die Umkehrrelation f^* von N auf M folgendermaßen definiert: $(y,x) \in f^*$.

Es gilt nun:

f^* ist Funktion, da eindeutig:

Aus $(c,a) \in f^*$ und $(c,b) \in f^*$ folgt $a = b$, da f eindeutig ist.

f^* ist eindeutige Funktion:

Aus $(c,a) \in f^*$ und $(d,a) \in f^*$ folgt $c = d$, da f eindeutig ist.

3. Transitivität: Aus $M_1 \approx M_2$ und $M_2 \approx M_3$ folgt $M_1 \approx M_3$

$f_1: M_1 \rightarrow M_2$ und $f_2: M_2 \rightarrow M_3$ seien eindeutige Funktionen; daraus folgt, daß die Zuordnung, die sich durch Hintereinanderschaltung von f_1 und f_2 ergibt, eine eindeutige Funktion ist:

Eindeutigkeit:

Für $(a_1, a_2) \in f_1$ und $(a_2, a_3) \in f_2$ ($a_1, b_1 \in M_1$) sei die Hintereinanderschaltung $f^* := \{(a_1, a_3)\}$.

Aus $(a_1, a_3) \in f^*$ und $(b_1, a_3) \in f^*$ folgt:

$(a_1, a_2) \in f_1$ und $(a_2, a_3) \in f_2$ und

$(b_1, b_2) \in f_1$ und $(b_2, a_3) \in f_2$.

Daraus folgt nun auf Grund der Eigenschaften der
eindeutigen Funktionen $a_2 = b_2$ und damit:

$$a_1 = b_1$$

Eindeutigkeit:

Aus $(a_1, a_3) \in f^*$ und $(a_1, b_3) \in f^*$ folgt:

$$(a_1, a_2) \in f_1 \quad \text{und} \quad (a_2, a_3) \in f_2 \quad \text{und}$$

$$(a_1, b_2) \in f_1 \quad \text{und} \quad (b_2, b_3) \in f_2$$

Daraus folgt $a_2 = b_2$ und damit $a_3 = b_3$.

2.3 Definition der Mächtigkeit oder Kardinalzahl m einer Menge M :

Mächtigkeit oder Kardinalzahl m von M , in Zeichen $|M|$, heißt ein beliebiger Repräsentant aus einer Menge von einander äquivalenten Mengen.

2.4 Definition der Kleiner-Relation zwischen Kardinalzahlen:

Eine Kardinalzahl m heißt kleiner ^{oder gleich} als einer Kardinalzahl n , in Zeichen $|M| \leq |N|$, genau dann, wenn gilt: M ist einer ~~echten~~ Teilmenge von N äquivalent.

Wir schreiben $|M| < |N|$ für $|M| \leq |N|$ ^{und} ~~oder~~ $|M| \neq |N|$; M ist einer Teilmenge von N äquivalent.

2.5 Definition der Endlichkeit einer Menge M :

Eine Menge M heißt endlich, genau dann, wenn gilt: Es gibt keine Teilmenge N von M , mit $N \neq M$ (d.i. echte Teilmenge), die der Menge M äquivalent ist.

2.6 Definition der Abzählbarkeit einer Menge M :

Eine Menge M heißt abzählbar unendlich, genau dann, wenn sie der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ äquivalent ist. Es gilt also $|M| = |\mathbb{N}|$ beziehungsweise $M \simeq \mathbb{N}$.

2.7 Drei Beispiele abzählbar unendlicher Mengen:

1. Die Menge der geraden Zahlen. Man erhält eine ein-

eindeutige Funktion von der Menge der natürlichen Zahlen auf die Menge der geraden Zahlen, indem man die geraden Zahlen ihrer Größe nach abzählt:

2 , 4 , 6 , 8 , ...

2. Die Menge der ganzen Zahlen.

Man erhält eine eineindeutige Funktion von der Menge der natürlichen Zahlen auf die Menge der ganzen Zahlen, indem man sie in folgender Anordnung von links nach rechts abzählt:

0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...

3. Die Menge der rationalen Zahlen:

Man erhält eine eineindeutige Funktion von der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen auf die Menge der rationalen Zahlen, indem man sie im folgenden Schema den Pfeilen folgend abzählt und diejenigen Zahlen dabei fortläßt, die schon aufgetreten sind:

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...
↓	↗	↘		
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	...
↓	↗	↘		
$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	...
.	↗	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

2.8 Satz: Die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar.

Beweis: Es genügt der Beweis der Nichtabzählbarkeit des Intervalls $I = (0,1)$, das sind alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1, wobei 0 und 1 selbst ausgeschlossen sind.

Die Existenz einer eineindeutigen Funktion von

der Menge der Punkte des Intervalls $(0,1)$ auf die Menge der reellen Zahlen, die durch die Zahlengerade dargestellt werden, läßt sich ^{durch} folgende Figur veranschaulichen:



Ein Dezimalbruch heißt nun normiert, wenn unendlich viele Stellen von 0 verschieden sind. Jeder Zahl $a \in I$ entspricht dann eineindeutig ein normierter Dezimalbruch.

Annahme: Es gibt eine Abzählung $a_1, a_2, \dots$ der Elemente von I . Dann gilt

$$a_1 = 0, a_{11}, a_{12} a_{13} \dots$$

$$a_2 = 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots$$

$$a_3 = 0, a_{31} a_{32} a_{33} \dots$$

$$\vdots$$

und jedes Element von I tritt in diesem Schema auf.

$$\text{Sei } b_i := \begin{cases} 1 & \text{falls } a_{ii} = 2 \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

Offenbar gilt dann: $b := 0, b_1 b_2 b_3 \dots$ ist ein normierter Dezimalbruch und $b \in I$. Das heißt, es gibt ein n , so daß gilt: $b = a_n$. Also gilt: $b_n = a_{nn}$ im Widerspruch zur Definition von b_n (sog. Cantorsches Diagonalverfahren).

2.9 Satz: Für beliebige Mengen M gilt: $|M| < |PM|$.

Beweis: Es gilt $|M| \leq |PM|$, da für $a \in M$ die Abbildung $a \mapsto \{a\}$ eine eineindeutige Funktion von M auf eine Teilmenge von PM ist.

Annahme: $|M| = |PM|$, d.h. es gibt eine eineindeutige Funktion g von PM auf M . Dann gilt:

Aus $x \in M$ folgt $gx \in M$.

Sei $N := \{gx : x \in M, gx \notin x\}$, dann folgt:
 $gx \notin N$ genau dann, wenn $gx \notin x$.

Da insbesondere $N \in M$ ist, erhält man mit $gN \in N$
 genau dann, wenn $gN \notin N$ einen Widerspruch.

2.9 besagt, daß es unendlich viele, voneinander verschiedene unendliche Kardinalzahlen gibt. Auf der Menge der Kardinalzahlen lassen sich nun Rechenoperationen definieren. Da wir diese jedoch im weiteren Verlauf nicht mehr benötigen, verzichten wir darauf, sie hier einzuführen. Statt dessen gehen wir zu den Ordinalzahlen über.

§ 3. Naive Ordinalzahltheorie

3.1 Definition des Begriffs der Ordnungsrelation auf M:

Eine zweistellige Relation R heißt eine Ordnungsrelation, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

- (O1) Antisymmetrie xRy daraus folgt $y \not R x$ $x, y \in M$
- (O2) Transitivität Es gelten xRy und yRz ; daraus folgt,
 es gilt xRz . $x, y, z \in M$

3.2 Definition des Begriffs der konnexen Relation:

Eine zweistellige Relation R auf einer Menge M heißt konnex, wenn für $x, y \in M$ genau einer der Fälle

$x = y$, xRy , yRx gilt.

3.3 Definition des Begriffs der Wohlordnung:

Eine Menge M heißt wohlgeordnet bezüglich einer zweistelligen Relation R , wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

- 1. R ist eine konnexe Ordnungsrelation.
- 2. Jede nichtleere Teilmenge von M enthält bezüglich R ein erstes Element.

Wird eine Menge M durch eine Relation R wohlgeordnet, (in Zeichen (M, R)), so heißt das Paar (M, R) eine Wohlordnung.

3.4 Definition der Ähnlichkeit zweier Wohlordnungen:

Zwei Wohlordnungen (M_1, R_1) und (M_2, R_2) heißen ähnlich, in

Zeichen $(M_1, R_1) \approx (M_2, R_2)$, wenn es eine Funktion von M_1 auf M_2 gibt: $f: M_1 \rightarrow M_2$, so daß gilt:
Für alle $m, n \in M_1$ mit $m R_1 n$ folgt $f m R_2 f n$, d.h. f ist ordnungstreu.

3.5 Die Relation der Ähnlichkeit zweier Wohlordnungen ist eine Äquivalenzrelation:

1. Reflexivität: $(M_1, R_1) \approx (M_1, R_1)$ Die identische Abbildung erfüllt die Bedingung der Ordnungstreu.
2. Symmetrie: Es gilt $(M_1, R_1) \approx (M_2, R_2)$ dann folgt $(M_2, R_2) \approx (M_1, R_1)$. Nach Voraussetzung gibt es eine ordnungstreu Funktion f von M_1 auf M_2 , das bedeutet aber, f ist eineindeutig. Daraus folgt (vgl. 2.2.2), daß auch f^{-1} eineindeutig, das heißt ordnungstreu ist.
3. Transitivität: Es gilt $(M_1, R_1) \approx (M_2, R_2)$ und $(M_2, R_2) \approx (M_3, R_3)$. Daraus folgt $(M_1, R_1) \approx (M_3, R_3)$.
Nach Voraussetzung gibt es f, g ordnungstreu: $f: M_1 \rightarrow M_2$
 $g: M_2 \rightarrow M_3$, das bedeutet aber eineindeutig. Daraus folgt, die Hintereinanderschaltung der beiden Funktionen ist wieder eineindeutig (vgl. 2.2.3), das bedeutet aber ordnungstreu.

3.6 Definition des Wohlordnungstyps:

Unter dem Typ einer Wohlordnung (M, R) versteht man einen beliebigen Repräsentanten aus einer Klasse von einander ähnlichen Wohlordnungen, in Zeichen: $\tau(M, R)$.

3.7 Definition der Ordinalzahl:

Die Ordinalzahl einer wohlgeordneten Menge ist deren Wohlordnungstyp.

3.8 Ist M eine wohlgeordnete Menge bezüglich R , und m eines ihrer Elemente, so heißt die Teilmenge A derjenigen Elemente von M für die gilt, daß sie m bezüglich R vorausgehen, ein (echter) Abschnitt von M .

3.9 Nun kann man eine Kleiner-Relation für Ordinalzahlen definieren:

$\tau(A, R_1) < \tau(M, R_2)$ gelte genau dann, wenn (A, R_1) einem

Abschnitt von (M, R_2) ähnlich ist.

3.10 (ohne Beweis) Durch die Kleiner-Relation wird die Menge der Wohlordnungstypen wohlgeordnet. (Zum Beweis vgl. Schütte (1) S.48/49)

3.11 Definition einer wohlgeordneten Summe von wohlgeordneten Mengen:

Seien (M_1, R_1) und (M_2, R_2) zwei Wohlordnungen, wobei M_1 und M_2 elementfremd sind. Für die Vereinigungsmenge von M_1 und M_2 , $S := M_1 \cup M_2$ wird die Relation R_S so definiert, daß (S, R_S) eine Wohlordnung ist. Für $s_1, s_2 \in S$ gelte:

$$\begin{aligned} s_1, s_2 \in M_1 & \quad s_1 R_S s_2 \text{ gdw } s_1 R_1 s_2 \\ s_1, s_2 \in M_2 & \quad s_1 R_S s_2 \text{ gdw } s_1 R_2 s_2 \\ s_1 \in M_1, s_2 \notin M_1 & \quad s_1 R_S s_2 \end{aligned}$$

Man sieht leicht, daß (S, R_S) wieder eine Wohlordnung ist.

Beispiel zur Addition:

$\{4, 7, 3\} + \{6, 8, 5\} = \{4, 7, 3, 6, 8, 5\}$ wobei die Elemente der Mengen in der Reihenfolge ihres Auftretens von links nach rechts geordnet sein sollen.

3.12 Definition der Summe zweier Ordinalzahlen:

Die Summe zweier Ordinalzahlen $\tau(M_1, R_1)$ und $\tau(M_2, R_2)$ sei definiert als wohlgeordnete Summe zweier elementfremder Repräsentanten der Mengen der zu (M_1, R_1) und (M_2, R_2) ähnlichen Wohlordnungen.

3.13 Eigenschaften der Addition von Ordinalzahlen:

3.13.1 Bei transfiniten Ordinalzahlen gilt nicht allgemein das Gesetz der Kommutativität.

Beispiel: $1 + \omega \neq \omega + 1$ dabei ist $\omega := \tau(\mathbb{N}, <)$
 $\{0\} + \{1, 2, 3, \dots\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \omega$
 $\{1, 2, 3, \dots\} + \{0\} = \{1, 2, 3, \dots; 0\} = \omega + 1$

3.13.2 Allgemein gilt für $\eta < \omega$: $\eta + \omega = \omega$ (ohne Beweis)

3.13.3 Für Ordinalzahlen gilt das Gesetz der Assoziativität:

Seien α, β, γ , Ordinalzahlen, dann gilt
 $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ (ohne Beweis)

3.14 Definition der Limeszahl:

Eine Ordinalzahl α heißt eine Limeszahl, wenn es keine Ordinalzahl β gibt, so daß gilt: $\beta + 1 = \alpha$.

3.15 Definition der additiven Hauptzahl:

Eine Ordinalzahl α heißt eine additive Hauptzahl, wenn sie von Null verschieden ist und für alle Ordinalzahlen β , die kleiner als α sind, gilt: $\beta + \alpha = \alpha$.

3.16 Definition der additiven Zerlegbarkeit von Ordinalzahlen:

Eine Ordinalzahl α heißt additiv zerlegbar, wenn es Ordinalzahlen β und γ mit $\beta < \alpha$, $\gamma < \alpha$ und $\alpha = \gamma + \beta$ gibt.

Bemerkung (ohne Beweis): Die von Null verschiedenen additiv unzerlegbaren Ordinalzahlen sind genau die additiven Hauptzahlen.

3.17 Beispiele: (ohne Beweis)

1.0 ist additiv unzerlegbare Ordinalzahl und Limeszahl.

2.1 ist additiv unzerlegbare Ordinalzahl und additive Hauptzahl.

Bemerkung: 0 bzw. 1 ist der Wohlordnungstyp der leeren bzw. einelementigen Menge. Die leere Menge ist bezüglich jeder Relation wohlgeordnet, da sie keine Elemente enthält. Eine Relation, die die einelementige Menge wohlordnen soll, muß tatsächlich nur die Bedingung der Asymmetrie erfüllen.

3. ω ist Limeszahl, additiv unzerlegbar und additive Hauptzahl.

Durch Einführung weiterer Rechenoperationen (Produkt und Potenz von Ordinalzahlen) kann die Menge der Ordinalzahlen weiter bestimmt werden. Da jede Menge wohlgeordnet werden kann (Wohlordnungssatz), läßt sich auch zu jeder Kardinalzahl eine wohlgeordnete Menge finden, deren Mächtigkeit gleich dieser Kardinalzahl ist.

Wir wollen jetzt mit einer kurzen Betrachtung der Antinomien

der naiven Mengenlehre diesen Abschnitt schließen.

§ 4. Antinomien der naiven Mengenlehre

4.1 Die Antinomie von Russell

1. Definition der Russellschen Menge R:

Wir gehen von der Annahme aus, daß durch jede sinnvolle Aussage eine Menge beschrieben wird (Komprehensionsprinzip).

Im allgemeinen enthält eine Menge sich selbst nicht als Element. Es erscheint also durchaus als sinnvoll, von einer Menge zu sprechen, deren Elemente sich selbst nicht enthalten.

Wir haben durch die Aussage "x enthält sich selbst nicht als Element" ($x \notin x$) die Menge all der Mengen beschrieben, die sich selbst nicht als Element enthalten (Russellsche Menge):

$$R := \{x : x \notin x\}$$

2. Bildung der Antinomie:

Nach dem Prinzip "tertium non datur" gilt, daß R sich entweder selbst als Element enthält, oder sich nicht selbst als Element enthält.

Angenommen, R enthält sich selbst als Element: $R \in R$. Dann folgt nach der Definition der Menge R, als Menge all der Mengen, die sich selbst nicht als Element enthalten, daß R sich nicht selbst als Element enthält: $R \notin R$.

Nehmen wir umgekehrt an, R enthält sich selbst nicht als Element: $R \notin R$. Dann folgt nach der Definition der Menge R, daß R sich selbst als Element enthält: $R \in R$.

3. Eine Veranschaulichung von Russell zu dieser Antinomie:

Die Elementschaftsrelation, die zur Definition der Russellschen Menge gebraucht wird, wird durch das Prädikat "rasieren" ersetzt; der Individuenbereich sei die Menge der Männer eines Dorfes. Wir betrachten die Menge derjenigen Männer des Dorfes, die sich nicht selbst rasieren.

Der Barbier im Dorfe sei nun als der Mann des Dorfes beschrieben, der genau diejenigen Männer des Dorfes rasiert, die sich nicht selbst rasieren.

Frage: Rasiert sich der Barbier selbst oder nicht? Angenommen, er rasiert sich selbst, dann gehört er zu den Männern des Dorfes, die der Barbier rasiert, die sich, nach Definition des Barbiers, nicht selbst rasieren.

Angenommen, er rasiert sich nicht selbst, dann gehört er zu den Männern im Dorfe, die vom Barbier rasiert werden, das heißt, der Barbier rasiert sich selbst.

Damit ist der Widerspruch gegeben.

4.2 Die Antinomie der Allmenge

1. Die Definition der Allmenge:

Wir gehen davon aus, daß man durch eine sprachliche Aussage alle Mengen zusammenfassen kann.

Wir definieren also folgendermaßen die Menge aller Mengen:

$$IM := \{x : x \text{ ist eine Menge}\}$$

2. Bildung der Antinomie:

Nach 2.9 gilt, daß die Mächtigkeit von IM echt kleiner ist als die Mächtigkeit der Potenzmenge von IM : $|IM| < |PIM|$.

Andererseits gilt für alle $a \in PIM$ (Elemente aus der Potenzmenge von IM) : a ist eine Menge, also ist a

auch aus $\mathbb{M}$ selbst. Es gilt also nach 1.4.4 ,
 daß die Potenzmenge von $\mathbb{M}$ eine Teilmenge von
 $\mathbb{M}$ selbst ist: $\mathbb{P}\mathbb{M} \subseteq \mathbb{M}$, das heißt aber:
 $|\mathbb{P}\mathbb{M}| \leq \mathbb{M}$.

Damit ist ein Widerspruch gegeben.

4.3 Die Antinomie der Menge aller Ordinalzahlen (Burali- Forti)

1. Die Definition der Menge aller Ordinalzahlen:

Es lassen sich Repräsentanten von Wohlordnungen
 (=Wohlordnungstypen, =Ordinalzahlen) so wählen, daß
 die Menge dieser Ordinalzahlen durch die Element-
 schaftsrelation $\in$ wohlgeordnet wird.

Wir nennen ω diese Menge aller Ordinalzahlen und
 Ω den Wohlordnungstyp $\tau(\omega, \in)$.

2. Bildung der Antinomie:

Einerseits gilt nun, wie für alle Ordinalzahlen:

$$\Omega \notin \Omega$$

Damit gilt auch: $\Omega \notin \omega$.

Andererseits ist Ω eine Ordinalzahl, also aus
 der Menge der Ordinalzahlen: $\Omega \in \omega$.

Damit ist ein Widerspruch gegeben.

Entgegen der Hegelschen Auffassung (Hegel (3) S.296), hat
 die Mengenlehre, als Theorie des Aktual-Unendlichen (Wit-
 tenberg (1) S.71), gezeigt, daß unendliche Größen vermehrt
 und vermindert werden können. Wir wollen jedoch derartige
 Ergebnisse der Mengenlehre, die in offenbarem Widerspruch
 zu philosophischen Lehrmeinungen stehen, nicht weiter verfol-
 gen, sondern versuchen, die mengentheoretische Denkweise mit
 ihren Definitionen zu einer Betrachtung der sogenannten "ma-
 thematischen" Antinomien Kants auszunützen.

2. Abschnitt: eine Betrachtung der ersten zwei Antinomien

Kants

Bekanntlich beansprucht Kant für seine Antinomie der reinen Vernunft, daß sie "natürlich" sei, d.h. daß sich die Vernunft notwendig darin verstricke. Wir wollen von diesem Anspruch absehen, da wir eine Begründung dafür noch weniger leisten können, als Kant selbst.

Die Antinomien sollen uns nur als Ausgangspunkt für unsere weiteren Überlegungen dienen. Ihr inhaltliches Interesse für den menschlichen Geist geht uns dabei nichts an. Wir werden aber sehen, daß sich die Struktur der Antinomien, die schon von Kant klar gesehen und angegeben wurden, leicht durch mengentheoretische Begriffe darstellen läßt. Damit haben wir einen Punkt, an dem sich Mathematik und Metaphysik, zwar nicht zeitlich, aber doch inhaltlich getroffen haben.

§ 4. Allgemeine Vorbemerkungen zu den Antinomien Kants

5.1 Die beiden ersten Antinomien, die sogenannten mathematischen, sind insofern schlecht gewählt, als sie einen physikalischen Inhalt haben, oder zumindest zu haben scheinen. Die Existenz eines Anfanges der Welt oder die Existenz eines Atoms ist etwas, von dem man glauben möchte, einen direkten oder indirekten Nachweis im Sinne der Naturwissenschaften durch Experimente führen zu können.

5.2 Kant selbst ist in dieser Hinsicht grundlegend anderer Ansicht: "... wie wollten wir es durch Erfahrung ausmachen: ob die Welt von Ewigkeit her sei oder einen Anfang habe? Ob Materie ins Unendliche teilbar sei oder aus einfachen Teilen bestehe? Dergleichen Begriffe lassen sich in keiner, auch der größtmöglichen Erfahrung (nicht) geben, mithin die Unrichtigkeit des behaupteten

oder verneinenden Satzes durch diesen Probierstein nicht entdecken." (Kant (2) §52b)

- 5.3 Wie sehr hier Kant seinen "metaphysischen" Vorurteilen über die Reichweite der Erfahrungswissenschaften und allgemeiner über die Grundlagen jeder Möglichkeit von Erfahrung unterliegt, wird klar, wenn man die neueren Ergebnisse der Physik bedenkt: Masse kann in Energie übergeführt werden; Energie aber tritt in diskreten Quanten auf.

Die Begrifflichkeit der Erfahrungswissenschaften konnte also tatsächlich in das Gebiet der "Elementarteilchen" vorstoßen, womit die Argumentation von Kant in ihrem ganzen Aufbau fragwürdig wird. Die Ergebnisse entsprechen zwar nicht den ursprünglichen metaphysischen Vorstellungen von einer Entscheidung der alternativ gestellten Frage nach der Teilbarkeit der Materie, aber das spricht eher gegen die Fragestellung der Metaphysik als gegen die Antworten, die die Physik im Rahmen ihrer Begriffe zu bieten hat.

- 5.4 Andererseits wollen wir nicht vergessen, daß naturwissenschaftliche Ergebnisse, als vorliegende Antworten, in keiner Weise auf die Problemstellung der Metaphysik gewertet werden können (vgl. E.4.3). Antinomien sind ein Phänomen, das im Bereich des reinen Denkens auftritt und auch nur hier seine "Lösung", das ist keine Entscheidung der einzelnen Antinomie, erfahren kann und soll.

- 5.5 Wir sehen uns durch erfahrungswissenschaftliche Ergebnisse also nicht der Schwierigkeiten der metaphysischen Fragestellung enthoben. Wenn wir daher nun die Antinomien Kants untersuchen wollen, geschieht dies in Absehung ihres besonderen Inhaltes.

Zu diesem Zweck sagen wir, daß einem Begriff genau diejenige Menge von Dingen entspricht, die unter diesen Begriff fällt. in diesem Sinne findet sich bei Klaus (1) das Beispiel:

"Dem Begriff 'Proletarier' entspricht eine Menge von Menschen, die durch eine bestimmte Stellung im Produktionsprozeß gekennzeichnet sind." (S.171)

Durch diese Zuordnung erhalten wir eine Möglichkeit, die Bildungsvorschrift für den Begriff des Anfanges der Welt als eine Bildungsvorschrift für diejenige Menge, die eben diesem Begriff entspricht zu interpretieren.

§ 6. Der Inhalt der beiden "mathematischen" Antinomien Kants hinsichtlich eines Vergleichs mit den vorgestellten mathematischen Antinomien

6.1 Die erste Antinomie ergibt sich aus der Frage nach der Ausdehnung der Welt in zeitlicher und räumlicher Hinsicht. Der fragliche Begriff, der sich als antinomisch herausstellen wird, ist der Begriff des Anfanges der Welt.

Kant betrachtet die Reihe der aufeinanderfolgenden Zustände der Welt. Den Anfang der Welt kann man nun als denjenigen Zustand bezeichnen, der allen Weltzuständen direkt vorausgeht.

6.1.1 Die Thesis der ersten Antinomie:

"Die Welt hat einen Anfang in der Zeit, und ist dem Raum nach auch in Grenzen eingeschlossen." (Kant (1) S.454)

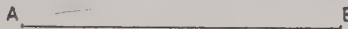
Die Thesis ist in ungenauer, eigentlich schon falsch zu nennender Weise bewiesen. Indem Kant die Reihe der aufeinanderfolgenden Zustände der Welt betrachtet, stellt er fest, daß die Reihe unendlich sein müsse, wenn die Welt keinen Anfang hätte.

"Nun besteht aber eben darin die Unendlichkeit einer Reihe, daß sie durch sukzessive Synthesis niemals vollendet sein kann. Also ist eine unendliche verflossene Weltreihe unmöglich, mithin ein Anfang der Welt eine notwendige Bedingung ihres Daseins; ... "

Den hier zitierten Schluß, durch den Kant die Unmöglichkeit eines Bestehens der Welt von Ewigkeit her bewiesen sehen möchte, können wir nicht akzeptieren. Da Kants Begriffe recht unklar sind, unterscheiden wir unsere Ablehnung der Schlußweise Kants nach den verschiedenen Möglichkeiten, die Begriffe 'Weltzustand' und 'unendliche Reihe von aufeinanderfolgenden Zuständen' aufzufassen:

6.1.1.1 Zum Begriff des Weltzustandes:

Wir wollen die Strecke AE betrachten:



A sei ihr Anfangs- und E ihr Endpunkt. AE repräsentiere einen endlichen Zeitabschnitt T. Es ist einleuchtend, wenn wir annehmen, daß jedem Zeitpunkt t ein Punkt der Strecke AE korrespondiere, wobei t_1 genau dann zeitlich vor t_2 liegen soll, wenn der zu t_1 korrespondierende Punkt auf AE links von dem zu t_2 korrespondierenden Punkt liegt. Von der Menge der Punkte, die auf der Strecke AE liegen, wissen wir aber, daß sie die Mächtigkeit der reellen Zahlen hat, also überabzählbar unendlich ist (vgl. 2.8).

Wenn wir nun annehmen, daß in jedem Zeitpunkt ein Zustand der Welt vorzustellen ist, ergibt sich, daß auf jeder beliebigen endlichen Zeitstrecke unendlich viele Weltzustände Platz haben.

Da in diesem Falle Anfang und Ende der Welt zusammenfallen würden, es daher keine Welt geben könnte, wollen wir annehmen, daß Kant einen derartigen Begriff des Weltzustandes nicht vor Augen hatte, allgemeiner, daß er nicht aus der Problematik der überabzählbar mächtigen Punktmengen schöpfen wollte. Im folgenden werde deswegen unter Weltzustand ein "Zustand" verstanden, der einer endlichen Zeitspanne entspricht.

6.1.1.2 Zum Begriff einer unendlichen Reihe von aufeinanderfolgenden Weltzuständen:

Wir gehen von einem gegebenen Zeitpunkt aus. Bis zu diesem Zeitpunkt ist dann sicher die Reihe von aufeinanderfolgenden Zuständen "unendlich groß". Nehmen wir an, dies meint Kant mit seiner Formulierung.

Dann gilt, daß die Folge (oder Reihe) der Zustände unendlich viele Glieder hat. Eine Abzählung ihrer Glieder (das ist eine eindeutige Funktion (vgl. 1.5.5) von der Menge der natürlichen Zahlen auf Folgenglieder) führt daher nicht zu einem Ende (das ist eine natürliche Zahl n , so daß eine Zuordnungsvorschrift, die mit 1 beginnt, mit der Zahl n alle Folgenglieder erfaßt hat). Trotzdem kann aber die Abzählung das "Ende" der Reihe der Weltzustände (das ist der gegebene Zeitpunkt) erreichen. Das Abzählen ist jedoch damit nicht beendet, da wir nicht gezwungen sind in der intuitiv naheliegenden Richtung der zeitlichen Abfolge vorzugehen. Jede Abzählung, die mit einem bestimmten Zeitpunkt beginnt, kann in die Richtung der Vergangenheit unbegrenzt weiterzählen. Ein Widerspruch zur Annahme, daß die Welt keinen Anfang habe läßt sich so nicht erhalten.

Kant meint offensichtlich etwas anderes, wenn er von der "unendlichen Reihe aufeinanderfolgender Zustände" spricht. Er legt wahrscheinlich Wert auf die gegebene Reihenfolge der abzuzählenden Zustände: die zeitliche Aufeinanderfolge der Weltzustände. "Unendlichkeit" dieser Reihe soll dabei so viel wie "ohne Ende" bedeuten (vgl. Hegel (3) S.285). Das heißt, in dieser Reihe darf es kein letztes Glied geben.

Hier muß zuerst gefragt werden, woher Kant glaubt, eine solche Unendlichkeit der Reihe folgern zu können. Aus der Annahme, daß die Welt keinen Anfang habe, läßt sich allenfalls schließen, daß ein Rückgang

in die Vergangenheit "unendlich" ("ohne Ende") ist, aber nicht, daß die Folge der Weltzustände in Richtung der Zukunft ohne Ende ist.

Hegel meint ((3) S.285) dieser Unterschied sei unwesentlich. Er sieht im ganzen Beweis einen Zirkel, indem durch die Annahme, daß die Welt keinen Anfang habe und die Annahme einer Grenze in der Gegenwart, dem gegebenen Zeitpunkt, der Widerspruch schon gegeben ist. Ob die Grenze nun der gegebene Zeitpunkt oder ein Anfang der Welt ist, bleibt für ihn ohne Bedeutung. Der Begriff "Grenze" unterliegt dabei wieder einer Unklarheit im Sinne von 6.1.1.1 . Eine Grenze in der Zeit kann eine Grenze für Zeitpunkte sein, an die immer eine beliebige Annäherung möglich ist, oder eine Grenze, über die eine Menge von Zeitabschnitten nicht hinausragen darf. Im ersten Fall birgt der Begriff einer begrenzten Unendlichkeit keinen Widerspruch.

Für den zweiten Fall, der sich mit der obigen Überlegung von Kant deckt gilt folgendes:

Der Satz: "Wenn eine Abzählung einer Folge in gegebener Anordnung unendlich ist, so hat diese Folge kein letztes Element" ist sicher wahr. Kant und Hesch schließen nun daraus, da die Folge der Weltzustände in der Reihenfolge des zeitlichen Ablaufes ein letztes Element hat, daß die Abzählung endlich sein müsse. Dieser Schluß ist voreilig, denn es ist noch nicht gezeigt, daß es eine Abzählung in der geforderten Anordnung der Elemente überhaupt gibt. Zu jeder Abzählung ist ein erstes Element verlangt (vgl. Wohlordnung 3.3.2) Es ist aber nicht möglich, ein erstes Element anzunehmen, ohne die Voraussetzung, daß die Welt keinen Anfang habe zu verletzen. Bei Kant geschieht dies in versteckter Weise, wenn er aus der Nichtexistenz eines Anfanges der Welt eine "unendliche Reihe" im Sinne einer unendlichen Abzählung von Zuständen folgert.

Die Annahme, daß die Welt keinen Anfang habe, erlaubt die Folgerung, daß die Menge der vorhergehenden, endlich langen Zeitabschnitte unendlich groß sein müsse. Die Definition der Größe einer unendlichen Menge ist zweideutig (vgl. §2 u. §3). Beide Möglichkeiten führen nicht zum gewünschten Ziel, dem Widerspruch zur Annahme. Das haben wir gezeigt, indem wir eine Abzählung der Folge in beliebiger Anordnung und eine Abzählung in der vorgegebenen Anordnung versucht haben.

Damit können wir die Thesis nicht als bewiesen ansehen. Auf eine Betrachtung der Behauptung in räumlicher Hinsicht können wir aufgrund der Analogie der Problematik verzichten.

- 6.1.2 Der Widerspruch, den Kant in der Annahme einer unendlichen aber verflossenen Zeit sieht, ist zunächst rein anschaulicher Natur. Es ist unvorstellbar, daß bis zu jedem Zeitpunkt eine aktual unendliche Menge zeitlicher Abschnitte vorliegt. Es widerspricht der Vorstellung von der Endlichkeit unserer Natur, daß in ihr irgendeine unendliche Mannigfaltigkeit begraben sein soll.

Hier sei an Achill, den schnellsten Läufer der Griechen erinnert. Sicherlich konvergiert die Reihe der Weg- und Zeitstrecken, die er durchläuft, um dorthin zu gelangen, wo die Schildkröte schon war, gegen einen Treffpunkt, der erfahrungsgemäß überschritten wird. Trotzdem bleibt es unvorstellbar, daß Achill dann unendlich viele Wegstrecken durchlaufen hat.

"Wenn aber die Strecke von der Länge 1 wirklich aus unendlichen Ganzen besteht, so widerstreitet es dem Wesen des Unendlichen, des Unvollendbaren, daß Achilleus sie alle schließlich durchlaufen hat. Gibt man diese Möglichkeit zu, so wäre es nicht einzusehen, warum nicht eine Maschine auch eine unendliche Folge distinkter Entscheidungsakte in endlicher Zeit zum Abschluß bringen könnte, indem sie etwa das erste Re-

sultat nach 1/2 Minute, das zweite 1/4 darauf usw. lieferte. So könnte man die sichere Entscheidung der an sie gerichteten Existentialfrage mit Ja oder Nein zuwege bringen." (Weyl (1))

6.1.3 Die Antithesis der ersten Antinomie:

"Die Welt hat keinen Anfang, und keine Grenzen im Raume, sondern ist, sowohl in Ansehung der Zeit, als des Raumes, unendlich." (Kant (3) S.454*)

Der Beweis erfolgt wiederum indirekt. Indem Kant einen Anfang annimmt, kann er leicht zeigen, daß dieser Begriff in seiner Absolutheit als Anfang der Welt widersprüchlich ist.

"Da der Anfang ein Dasein ist, wovor eine Zeit vorhergeht, darin das Ding nicht ist, so muß eine Zeit vorhergegangen sein, darin die Welt nicht war, d.i. eine leere Zeit. Nun ist aber in einer leeren Zeit kein Entstehen irgend eines Dinges möglich; ... " (Kant (1) S.454*)

6.2 Die zweite Antinomie bietet die gleiche Struktur wie die erste. Der fragliche Begriff ist diesmal der "Anfang" der Materie, das heißt es wird nach dem kleinsten Baustein der Materie gefragt. Es geht also darum, ob Materie ins unendliche teilbar ist oder nicht.

In der gleichen Weise wie in der ersten Antinomie verfolgt man ein gegebenes "Stück" Materie bezüglich der Relation des Kleinerseins. Wenn wir ein "Stück" Materie vorliegen haben, teilen wir dieses, nehmen die eine Hälfte davon, teilen diese erneut, nehmen eine Hälfte und teilen diese wiederum usw. Der Anfang der Materie ist dann dasjenige Stück, das jeder teilbaren Materie direkt in der Relation vorausgeht. Dieses ist jedoch wieder ein antinomischer Begriff.

6.2.1 Die These der zweiten Antinomie:

"Eine jede zusammengesetzte Substanz in der Welt besteht aus einfachen Teilen, und es existiert überall nichts als das Einfache, oder das, was aus diesem zu-

sammengesetzt ist." (Kant (1) S.458)

Der Beweis zur Thesis erfolgt eigenartigerweise bei Kant nicht analog zur ersten Antinomie. Während in der ersten Antinomie die unendliche Reihe der Schritte betrachtet wird, die durch die angenommene Nichtexistenz eines Anfanges ermöglicht ist, wird hier nicht direkt auf die unendliche Teilbarkeit Bezug genommen, obwohl Kant wieder einem ähnlichen Trugschluß unterliegt.

Analog zu 6.1.1 gilt folgendes:

Aus der Annahme, daß die zusammengesetzten Substanzen nicht aus einfachen Teilen bestehen, folgt zunächst nur, daß eine Folge von Teilungen nicht zu einem letzten Element Element gelangt. Eine Zerlegung ist also "unendlich" im Sinne von "ohne Ende". In der Relation ihres Vorgehens läßt sie also nichts übrig, was man als Substanz bezeichnen könnte, das heißt zerlegbar wäre.

Der Fehlschluß Kants liegt in der Feststellung, daß damit keine Substanz gegeben worden sei. Woher weiß er dies, wenn nicht aus dem Versuch, mit dem "Resultat" dieser Zerlegung wieder Substanz zusammenzusetzen? Auch mit einer unendlichen Zusammensetzung gelangt er von unendlich kleinen Größen niemals mehr zu einer Substanz.

Die unendliche Zusammensetzung von etwas unendlich Zerlegtem erlaubt wieder zwei Deutungen:

- a) Wir fangen bei einem bestimmten Glied der Folge der zerlegten Teile an und setzen die Teile in beliebiger Anordnung zusammen. Wir sind nicht gezwungen, bei einem einfachen Teil anzufangen, denn nach Voraussetzung gibt es ein solches nicht. Eine unendliche Zusammensetzung wird dann alle Glieder erfassen.
- b) Wir halten uns fest an die vorgegebene Reihenfolge, indem wir die Zerlegung von ihrem Ende wieder rückgängig machen. Es gilt dann selbstverständlich der Satz, "wenn man mit dem übrig gebliebenen Teil

einer Zerlegung anfangend eine Zusammensetzung vornimmt, so muß man zur ursprünglichen Substanz kommen". Kant gelangt aber in seiner unendlichen Zusammensetzung zu keiner noch so kleinen Substanz überhaupt. Seine Zusammensetzung ist wiederum voreilig. Denn wie er selbst sagt, bleibt nichts übrig, er kann also eine Zusammensetzung gar nicht erst anfangen. Im übrigen würde er durch einen Beginn mit einer Zusammensetzung gegen die Voraussetzung verstoßen, nach der in der Folge der zerlegten Teile kein letztes Teil auftritt, es somit in der Folge der Zusammensetzung kein erstes Teil geben kann.

Auch diese Thesis können wir also nicht als bewiesen ansehen.

6.2.2 Die Antithesis der zweiten Antinomie:

"Kein zusammengesetztes Ding in der Welt besteht aus einfachen Teilen, und es existiert überall nichts Einfaches in derselben." (Kant (1) S.458*)

Der Beweis erfolgt analog zum Beweis der Antithesis der ersten Antinomie. Kant geht zurück bis zur kleinsten Substanz. Entsprechend der "leeren Zeit", die dem Anfang der Welt vorausgeht, nimmt auch die einfache Substanz einen Raum ein, das heißt etwas, daß in der gegebenen Relation noch vorhergeht.

"Da nun alles Reale, was einen Raum einnimmt, ein außerhalb einander befindliches Mannigfaltiges in sich faßt, mithin zusammengesetzt ist, und zwar als ein reales Zusammengesetztes, ... ; so würde das Einfache ein substanzielles Zusammengesetztes sein, welches sich widerspricht." (Kant (3) S.458*)

6.3 Die Behauptung, daß die Beweise Kants teilweise "falsch" seien, bewegt sich, wie die Beweise Kants selbst, auf einer Ebene des intuitiven Vorverständnisses der Natur von Beweisen. Sie erheben deshalb keinen Anspruch auf größere Exaktheit.

§ 7. Möglichkeiten einer Interpretation der Antinomien Kants durch mengentheoretische Begriffe

7.1 Zur Möglichkeit einer Interpretation

Wenn wir versuchen wollen, die Antinomien Kants im Sinne eines naiven Mengenbegriffes zu interpretieren, so können wir nicht darauf bestehen, sie genau in der Weise zu übersetzen, wie Kant sie sich gedacht hat. Dazu sind die Begriffe bei Kant zu unklar bestimmt. Deshalb werden für die antinomischen Mengen Bildungsvorschriften angegeben, die einerseits der Vorstellung Kants von der Gestalt des antinomischen Begriffs möglichst nahe kommen, andererseits den Widerspruch tatsächlich liefern können.

Die Vorstellung Kants von der Art der Bildungsvorschrift antinomischer Mengen sehen wir dadurch charakterisiert, daß "die Synthesis eine Reihe ausmacht, und zwar der einander untergeordneten (nicht beigeordneten) Bedingungen zu einem gegebenen. Die absolute Totalität wird von der Vernunft nur sofern gefordert, als sie die aufsteigende Reihe der Bedingungen zu einem gegebenen Bedingten angeht, ...". (Kant (1) S.440)

7.2 Die Grundgedanken der mathematischen Antinomien

7.2.1 Die Russellsche Antinomie:

Die Russellsche Antinomie ist einfach aufgebaut. Um eine Antinomie nach diesem Muster zu erhalten, benötigt man für eine Menge M von Objekten, die ihrerseits auch wieder Mengen sein dürfen, eine Relation R , so daß für jedes Objekt (Element) x der Menge M gilt, daß x entweder in der Relation R zu sich selbst steht oder nicht: xRx oder $x\not Rx$.

Man betrachtet nun die Menge derjenigen Elemente x von M , für die gilt, daß x nicht in der Relation R zu sich selbst steht: $N := \{x : x \in M \text{ und } x\not Rx\}$.

Wir können dann leicht die antinomische Menge B definieren: B sei diejenige Menge, die genau zu allen Elementen der Menge N in der Relation R steht; es gilt also:

BRx für alle $x \in N$, also $BRx \Leftrightarrow x \in N \Leftrightarrow x \notin x$.

Nun gilt nach dem tertium non datur: BRB oder $B \notin B$.

Es gilt aber: $BRB \Leftrightarrow B \in N \Leftrightarrow B \notin B$.

7.2.2 Die Antinomie der Allmenge

Wenn man sich eine allumfassende Menge vorstellt, so ist es klar, daß sie auch die größte Menge sein soll. Da durch die Mengenlehre eine exakte Definition der Größe einer unendlichen Menge geleistet wurde, kann man feststellen, daß es zu jeder größten Menge immer eine noch größere Menge gibt.

7.2.3 Die Antinomie der Menge aller Ordinalzahlen

Da es zwei Möglichkeiten gibt, die Größe einer unendlichen Menge zu definieren, gibt es entsprechend den beiden Definitionen (Ordinal- und Kardinalzahl) auch zwei Möglichkeiten den Begriff einer größten Menge der antinomischen Struktur zu überführen.

Die Antinomie der Allmenge beruht auf der Definition der Mächtigkeit einer Menge, die Menge aller Ordinalzahlen auf der Definition der Wohlordnung einer Menge. Da die Menge aller wohlgeordneten Mengen - und jede Menge läßt sich wohlordnen - wieder wohlgeordnet werden kann und somit als Ordinalzahl aufgefaßt werden kann, ist sie Element von sich selbst, was aber nach Definition der Ordinalzahlen verboten ist.

7.3 Möglichkeiten der Interpretation mithilfe der einzelnen mathematischen Antinomien

7.3.1 Zur Interpretation an Hand der Russellschen Antinomie

Die Menge der Objekte ist in den beiden Antinomien gegeben:

- a) Die Zustände der Welt in ihrer zeitlichen Abfolge.
- b) Die Teile der Materie, wenn man sie durch Teilung in ihrer Reihenfolge auf ein kleinstes Teil hin untersucht.

Damit ist auch für jeden Fall eine Relation gegeben. Die Definition des gesuchten Begriffes, des Anfanges der Welt, beziehungsweise des kleinsten Bausteines der Materie ist eine Vorschrift, wie das im Begriff Bezeichnete aufzusuchen ist. Durch den Gang des Aufsuchens (Zurückgehen in die Vergangenheit, beziehungsweise Teilung des jeweils Gegebenen) wird eine Menge gegeben und gleichzeitig eine Relation, bezüglich derer die Menge wohlgeordnet ist. Der zu definierende Begriff wird nun als Endpunkt oder Grenzpunkt dieser zu durchlaufenden Reihe verstanden.

Die Elemente der Menge können nun in den einzelnen Fällen folgendermaßen definiert werden:

- a) Für alle Zustände der Welt, die in der zeitlichen Reihenfolge ablaufen, gilt sicher, daß sich kein Zustand wiederholt, insbesondere, daß kein Zustand auf sich selbst folgt. In diesem Fall würde die Welt sonst im Kreis sich bewegen, beziehungsweise im extremen Fall auf einem Punkt stillstehen. So können wir die Welt als Menge der Zustände bezeichnen, die nicht auf sich selbst folgen. Das entspricht der Vorstellung, daß außerhalb dieser Welt nichts entstehen oder vergehen kann (vgl. Kant (1) S.454*). Der Anfang der Welt kann nun definiert werden als ein Zustand dieser Welt oder nicht dieser Welt, für den gilt, daß er direkt auf alle Weltzustände vorausgeht, das heißt er folgt in dem Weg in die Vergangenheit auf genau die Zustände, die nicht sich selbst folgen. Man sieht dabei leicht die analoge Struktur der Definition zur Russellschen Antinomie oder zum Barbier.
- b) Für alle Materie der Welt gilt sicher, daß bei einer Teilung jedes der entstehenden Stücke echt kleiner als das ursprüngliche Stück ist. Einleuchtenderweise gilt aber auch für jedes Materiestück, daß es nicht kleiner als es selbst ist. In der gleichen Weise wie in a) läßt sich nun der gesuchte Begriff

des kleinsten Bausteins der Materie als dasjenige "Stück" definieren, welches allen Teilen in der Relation des Kleinerseins vorausgeht, die nicht kleiner als sie selbst sind.

Diese Möglichkeit geht allerdings nur im Beweis der Antithesis, in der die Existenz eines Anfangs widerlegt wird, da die Annahme einer Existenz zu einem Widerspruch führt.

7.3.2 Zur Interpretation an Hand der Antinomie der Allmenge

Als Allmenge läßt sich natürlich in geeigneter Weise der Begriff der Welt interpretieren. Der Begriff der Welt wird damit in seiner allumfassenden Konzeption mit der Widerprüchlichkeit der Allmenge belegt. Nachdem sich aus einer Antinomie jede beliebige Aussage herleiten läßt, ist natürlich auch ein Anfang und die Nichtexistenz eines Anfanges der Welt beweisbar.

Für die zweite Antinomie von Kant läßt sich nur mit wenig Plausibilität eine "Allmenge der materialen Substanz" definieren. Für diese Menge, die alles, was nur irgendwie Substanz ist in sich begreifen soll, sieht man leicht ein, daß sie widersprüchlich im Sinne der Antinomie der Allmenge ist. Es gilt natürlich, daß jede Teilmenge von Substanz wieder Substanz ist. Auf diese Weise läßt sich einfach die Potenzmenge, die Menge aller Teilmengen von Substanz bilden, die als zusammengesetzte Substanz selbstverständlich wieder Substanz sein muß. Der Widerspruch ergibt sich nach dem bekannten Schema, daß einerseits die Menge aller Substanz die Potenzmenge der Substanz enthalten muß, andererseits allgemein gilt, daß die Potenzmenge echt größer als die Menge selbst ist. Aus diesem Widerspruch läßt sich dann wieder jede beliebige Aussage ableiten.

7.3.3 Zur Interpretation an Hand der Antinomie der Menge aller Ordinalzahlen

Um die beiden "mathematischen" Antinomien Kants mithilfe der Antinomie der Menge aller Ordinalzahlen zu fassen, greifen wir auf die in 7.3.1 gebrachte Menge mit ihrer Relation zurück.

- a) Wir betrachten die Zustände (Zeitabschnitte) der Welt bezüglich der Relation ihres Vorhergehens in der zeitlichen Aufeinanderfolge von einem gegebenen Punkt aus.

Jede beliebige Menge von Zuständen der Welt ist sicherlich bezüglich dieser Relation wohlgeordnet. Ebenso ist klar, daß die Menge aller (wohlgeordneten) Mengen von Weltzuständen wieder wohlgeordnet ist, also aus der Menge der wohlgeordneten Zustände ist.

Nun fragt sich, ob der Menge aller Zustände etwas vorausgeht (vgl. Kant (1) "leere Zeit" s.S.458*), das heißt, ob die Welt einen Anfang hat. Aus der Tatsache, daß die Menge der Weltzustände sich selbst als Element enthält folgt aber einerseits M (Menge der Weltzustände) geht sich selbst nicht voraus, da M eine Wohlordnung ist und allgemein gilt MxM , andererseits M geht sich selbst voraus, da M ein Weltzustand ist und M nach Definition allen Weltzuständen vorausgeht.

- b) Wir betrachten Teilungen einer gegebenen Substanz. Es ist klar, daß jede Menge von solchen Teilungen wohlgeordnet ist, wenn wir sie in der Relation der Reihenfolge ihrer Ausführung betrachten. Außerdem gilt, daß eine Menge von Teilungen wieder eine Teilung ist.

Für die Menge T aller Teilungen einer gegebenen Substanz gilt nun, daß sie wohlgeordnet ist durch die Relation R und außerdem, daß sie selbst eine Teilung der gegebenen Substanz und daher Element von sich selbst ist.

Einerseits gilt nun, daß T in der Relation R auf sich selbst nicht folgen darf, da dies allgemein

für Elemente wohlgeordneter Mengen verboten ist. Andererseits gilt aber, daß T auf alle Teilungen folgt, die Element von T sind. Da aber auch T Element von T ist, folgt auch T in der Relation R auf sich selbst.

3. Abschnitt: "Ursachen" der Antinomien

Die Bedeutung des Auftretens von Antinomien muß zusammen mit der unangetasteten Forderung nach Widerspruchsfreiheit gesehen werden. Dann ist es einleuchtend, daß man in dem Sinne nach den "Ursachen" der Antinomien fragt, daß man ein Mittel in die Hand bekommen will, die Antinomien auszuschließen, indem man das ausschließt, was sie bedingt. Stegmüller (1) unterscheidet zwei Einstellungen zu den Antinomien: Die Suche nach einem logischen Fehler und die Suche nach einer technischen Methode zur Beseitigung der Antinomien.

Wir wollen uns an diese Unterscheidung halten und überschreiben dementsprechend die beiden nächsten Paragraphen.

§ 8. "Logische Fehler" in der Bildung der Antinomien

8.1 Zur Imprädikativität der Definition des antinomischen Begriffs oder der antinomischen Menge

8.1.1 "Imprädikativ" soll eine Definition heißen, wenn der zu definierende Begriff bezüglich einer Gesamtheit definiert wird, der er selbst angehört.

8.1.2 Eine zirkelhafte Definition ist ein Spezialfall einer imprädikativen Definition, wenn die betreffende Gesamtheit nur aus dem zu definierenden Begriff selbst besteht.

8.1.3 Bei Kant (2) §52c finden wir einen Hinweis auf die versteckte imprädikative Auffassung der Begriffe Raum und Zeit bei einer Aussage über sie. Für alle Gegenstände in Raum und Zeit gilt, daß sie nur durch die Erfahrung gegeben sind. Dies gilt für alle Gegenstände in Raum und Zeit, nicht jedoch für Raum und Zeit selbst. Raum und Zeit sind Anschauungs-

formen a priori, die jeder Erfahrung vorausgehen. Es ist daher unsinnig über ihre Endlichkeit oder Unendlichkeit zu sprechen.

Das Analoge gilt für die Substanz. Substanz als reiner Verstandesbegriff ermöglicht allererst Materie durch Erfahrung zu fassen. Als reiner Verstandesbegriff aber geht der Begriff der Erfahrung jederzeit voraus.

8.1.4 Hegel ((3) S.285) bezeichnet den Beweis der Thejis der ersten Antinomie direkt als zirkelhaft, da die Annahme eines gegebenen Zeitpunktes schon die Einführung einer Grenze der unendlichen Zeitreihe sei und somit schon widersprüchlich (vgl. 6.1.1.2).

8.1.5 Die Imprädikativität kann man in einigen Fällen dadurch vermeiden, daß man ausdrücklich die Zugehörigkeit des definierten Begriffs zur definierenden Gesamtheit verbietet.

8.1.5.1 Im Beispiel des Barbiers:

Als definierende Menge wird die Menge der Männer eines Dorfes betrachtet. Für sie gilt, daß sie sich entweder selbst rasieren oder nicht selbst rasieren. Der Barbier wird nun definiert als der Mann, der alle Männer des Dorfes rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Stellt man zusätzlich die Forderung, daß er kein Mann des Dorfes sei, so läßt sich der Widerspruch nicht mehr bilden.

8.1.5.2 In der Russellschen Antinomie

$R := \{x : x \in M \wedge x \notin x\}$. Gilt nun zusätzlich die Forderung, daß R nicht aus der betrachteten Menge M sei, so folgt:

$$R \in R \Leftrightarrow R \in \{x : x \in M \wedge x \notin x\} \Leftrightarrow R \in M \wedge R \notin R$$

Aus der Äquivalenz ist zu ersehen, daß zwar $R \notin R$ aus der Annahme $R \in R$ folgt, aber nicht mehr umgekehrt $R \in R$ aus der Annahme $R \notin R$. Damit besteht kein Widerspruch mehr.

8.1.5.3 In der Antinomie der Allmenge

$M := \{x : x \text{ ist eine Menge}\}$. Wenn wir fordern, daß M selbst keine Menge sein darf, also nicht Element von sich selbst ist, dann gilt nicht mehr: $x \in PM$

$\Rightarrow x \in M$! Denn es gilt zwar $IM \in PM$ aber nicht mehr: $IM \in IM$! Damit ist die Antinomie nicht mehr herleitbar.

8.1.5.4 Wir treffen die "Imprädikativität" jedoch auch in Formen an, in denen sie, nach bisheriger Kenntnis, keinen Schaden verursacht. Ein Beispiel ist die Definition einer reellen Zahl durch eine konvergierende Folge von reellen Zahlen. (vgl. Gentzen (1))

8.1.6 Interpretiert man die Antinomien von Kant im Sinne von 7.3.1 , so stellt man fest, daß sie sich vermeiden lassen, wenn man verbietet, daß

- a) die Menge aller Weltzustände wieder ein Weltzustand ist;
- b) die Menge einer Teilungsfolge an ihrem Ende wieder der Materie vor sich liegen hat.

8.1.7 Interpretiert man die Antinomien von Kant im Sinne von 7.3.2 , so stellt man fest, daß sie sich vermeiden lassen, wenn man verbietet, daß

- a) die Menge all dessen was in der Welt vorkommt, also schlechthin die Welt selbst, in der Welt vorkommt;
- b) die Menge aller Substanz wieder eine Substanz ist.

8.1.8 Interpretiert man die Antinomien von Kant im Sinne von 7.3.3 , so stellt man fest, daß sie sich vermeiden lassen, wenn man verbietet, daß

- a) die Menge aller Weltzustände wieder ein Weltzustand ist (vgl. 8.1.6 a));
- b) die Menge aller Teilungen wieder eine Teilung ist.

8.2 Eigentümlichkeiten von Mengen mit unendlich vielen Elementen

8.2.1 Die unbeschränkte Gültigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten ist nicht einzusehen (vgl. Schütte (3) S.1). Eine Behauptung, die für eine Menge mit unendlich vielen Elementen gelten soll, kann nicht durch Ausprobieren bewiesen und in vielen Fällen nicht einmal widerlegt werden.

Eine solche Behauptung kann nur dann als bewiesen angesehen werden, wenn es eine allgemeine Vorschrift gibt, die die Behauptung für jedes Element der Menge beweist und nur dann als widerlegt angesehen werden, wenn man ein Element angeben kann, für das die Behauptung nicht zutrifft.

Zeigt sich, daß im Rahmen des bisher Möglichen, das heißt in den naturgemäß endlichen Versuchen des Menschen, weder eine allgemeine Vorschrift noch ein Gegenbeispiel gefunden werden konnte, so hat es keinen Sinn, sich darauf zu berufen, daß es eine Lösung geben müsse, das heißt, daß die Behauptung wahr oder falsch sein müsse.

Auf diese Annahme stützt sich aber das indirekte Beweisverfahren. Das indirekte Beweisverfahren wurde auch beim Beweis der Kantischen Antinomien verwendet.

8.2.2 Auf Grund dieser Überlegungen versucht man in der Mathematik ohne den Rückgriff auf das tertium non datur auszukommen.

Es zeigt sich damit wieder, wie vorsichtig man bei der Behandlung unendlicher Mengen sein muß. Viele Gesetze, die im inhaltlichen, endlichen Bereich eine unumschränkte Geltung haben, werden im Bereich unendlicher Mengen fragwürdig.

Aus dieser Überlegung wollen wir weiter keine Folgerungen für unsere Beispiele der Antinomien ziehen. Wie stark Kant mit seinen "endlichen" Begriffen bei der Behandlung unendlicher Mengen Irrtümern unterlag, werden wir noch in § 20 sehen.

§ 9. Technische Methoden zur Vermeidung der Antinomien

9.1 Russells Typentheorie

9.1.1 Eine Einteilung der Mengen in Stufen

9.1.1.1 Wir haben einen Bereich von Objekten. Diese Objekte bezeichnen wir als "Mengen 1-ter Stufe". Als Urelemente haben Mengen 1-ter Stufe selbst keine Elemente.

9.1.1.2 Aussagen über Urelemente, also Mengen 1-ter Stufe, beschreiben nach dem Grundprinzip der Mengenbildung (Komprehensionsprinzip) eine Menge. Wir nennen derart geschaffene Mengen "Mengen 2-ter Stufe". Elemente von Mengen 2-ter Stufe können also nur Urelemente (also Mengen 1-ter Stufe) sein.

9.1.1.3 Allgemein soll eine Menge der n -ten Stufe zugeordnet werden, wenn sie als Elemente nur Mengen der Stufe $n-1$ enthält.

9.1.2 Das Komprehensionsprinzip lautet damit:

Wenn $F(x^n)$ eine Aussage ist, die sich auf Mengen n -ter Stufe bezieht, so gilt:

$$a^m \in \{x^n : F(x^n)\} \quad \text{gdw} \quad m = n-1 \text{ und } F(a^m)$$

9.1.3 Wie man leicht sieht ist damit die Bildung der Russellschen Antinomie nicht mehr möglich.

Die Aussage $x^n \in x^n$ ist hier sinnlos, damit auch ihre Negation $\neg(x^n \in x^n)$, welche die Russellsche Menge beschreiben soll. Die Russellsche Menge R läßt sich hier also gar nicht erst formulieren.

Analoges gilt für die Antinomie der Allmenge und die Antinomie der Menge aller Ordinalzahlen.

9.1.4 Durch die Russellsche Vorschrift werden die Möglichkeiten zur Mengenbildung stark eingeschränkt. Einen "typenfreien" Aufbau der Mengenlehre lieferten deshalb:

9.2 Zermelo - Fraenkel - Skolem

9.2.1 Das allgemeine Cantorsche Prinzip zur Bildung von Mengen, das Komprehensionsprinzip, wird dadurch eingeschränkt, daß man sich auf eine relative Allmenge A von Objekten beschränkt. Jede Mengenbildung ist eine Aussonderung gewisser Teilmengen von A durch Aussagen.

9.2.2 Die Vorschrift zur Mengenbildung nimmt mit dieser Einschränkung auf eine Allmenge A folgende Gestalt an:

Wenn F eine Aussage ist, dann soll F genau dann geeignet sein, eine Menge zu beschreiben, wenn es in jeder Allmenge A möglich ist, mit dieser Aussage widerspruchsfrei eine Menge zu bezeichnen.

Das bedeutet:

Wenn $F(x)$ eine Aussage ist, die auf x zutrifft, dann gilt:

$$a \in \{x : F(x)\} \quad \text{gdw} \quad a \in A \quad \text{und} \quad F(a) \quad \text{für ein festes } A$$

9.2.3 Auf diese Weise ist es nicht mehr möglich, die Aussage, die zur Bildung der Russelschen Menge geführt hat, als eine zur Mengenbildung geeignete Aussage zu begreifen.

Sei $R := \{x : x \notin x\}$. Angenommen es gibt eine Allmenge, so daß R eine Menge ist, dann gilt:

$$x \in R \quad \text{gdw} \quad x \notin x \quad \text{für alle } x, \text{ insbes. auch für } R$$

Das bedeutet, daß die Annahme widersprüchlich ist und R deshalb nicht gebildet werden kann.

Desgleichen sind auch die Antinomie der Allmenge und der Menge aller Ordinalzahlen bei dieser Formulierung des Komprehensionsaxioms nicht herleitbar.

9.3 Die Formulierung des Komprehensionsaxioms nach Neumann-Bernays

9.3.1 Man unterscheidet Mengen und Unmengen; allgemein redet man von Klassen.

Mengen sind nun solche Klassen, die wiederum Elemente von anderen Klassen sein können. Klassen, die nicht Elemente von Klassen sein können heißen dementsprechend Unmengen.

9.3.2 Das Komprehensionsprinzip von Cantor wird nun durch die Forderung eingeschränkt, daß nur Mengen durch Aussagen definiert werden können. Diese Forderung nimmt folgende Gestalt an:

$$a \in \{x : F(x)\} \quad \text{gdw} \quad \mathbb{M}(a) \quad \text{und} \quad F(a)$$

($\mathbb{M}(a)$ bedeutet dabei: a ist eine Menge)

9.3.2 Wie die Antinomien auf diese Weise vermieden werden, zeigt sich in § 19.6

K a p i t e l I I

EINE ERSTE MÖGLICHKEIT, DEN ANTINOMIEN ZU BEGEGNEN: AUS-
SCHLUSS DER ANTINOMISCHEN BEGRIFFE

Es ist klar, daß man zunächst für eine Theorie Widerspruchs-
freiheit fordert. Die Möglichkeit, Antinomien zu bilden, muß
daher ausgeschlossen werden

Kant hat versucht, die Antinomien der Philosophie durch ei-
ne Einschränkung der Geltung der reinen Vernunft Erkenntnis
zu vermeiden. In der Mathematik ist das Ziel, soweit man
absehen kann, durch eine Einschränkung des allgemeinen
Komprehensionsprinzips in der axiomatischen Mengenlehre
erreicht worden.

In diesem Kapitel wollen wir beide Versuche betrachten.

1. Abschnitt: Der Versuch Kants einer wissenschaftlichen
=====Begründung der Metaphysik
=====

Seinen Versuch, das Auftauchen der Antinomien zu begründen
und ihnen im menschlichen Erkenntnisstreben einen Platz zu-
zuweisen, bringt Kant innerhalb einer allgemeinen Metatheo-
rie der menschlichen Erkenntnis, verbunden mit einer Art
Anweisung zum "richtigen", d.i. antinomiefreien Gebrauch
der Vernunft, der "Kritik der reinen Vernunft".

Der erste Teil der Kritik, mit dem Titel "Transzendente
Elementarlehre" überschrieben, baut den für uns interessan-
ten Rahmen zur Bildung der Antinomien auf. Wir bringen des-

halb im folgenden einen kurzen Abriß des Aufbaus der "transzendentalen Elementarlehre", der uns mit einigen Behauptungen Kants über die Natur der reinen Wissenschaften zu einer anderen Möglichkeit, den Antinomien zu begegnen, führen wird (Kap.III).

Zunächst haben wir die Mittel, in einfacher Weise das mathematische Vorgehen zur Definition unendlicher Zahlen mit dem Kantischen Vorgehen, durch welches er von der unendlichen Mannigfaltigkeit des Sinnlichen zur Erfahrung gelangt, zu vergleichen. (§12)

§ 10. Eine Abgrenzung des Begriffs der metaphysischen Erkenntnis bei Kant

Bemerkung: Die folgenden Sätze und Definitionen sind frei aus der Kantischen Kritik entnommen. Sie sind nur mit starken Einschränkungen als exakt zu bezeichnen, da sich die Definitionen ihrerseits auf nicht weiter definierte Begriffe stützen, und die Beweise zu den Sätzen nicht in einem explizit angegebenen System von Voraussetzungen und Schlußfolgerungen stehen.

10.1 Definitionen:

1. Eine Erkenntnis heiße "a priori", wenn sie von der Erfahrung und Sinneseindrücken unabhängig ist.
2. Eine Erkenntnis heiße "a posteriori", wenn sie nicht a priori ist.

Bem.: Erkenntnisse a priori sind die Grundlage von Urteilen a priori.

10.2 Satz: Wird ein Satz zugleich mit seiner Notwendigkeit

gedacht, so ist er ein Urteil a priori.

Beweis: Angenommen, das Urteil sei nicht a priori, also a posteriori.

Dann ist Erfahrung die Grundlage für den Satz. Da uns aber Erfahrung nur lehrt, daß etwas so oder so beschaffen sei, und nicht, daß es nicht anders sein könne, wird der Satz nicht mit seiner Notwendigkeit gedacht. Dies aber ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

10.3 Satz: Wird ein Satz in seiner strengen Allgemeinheit gedacht, so ist er ein Urteil a priori.

Beweis: Angenommen, das Urteil sei nicht a priori, also a posteriori.

Dann ist der Satz von der Erfahrung abhängig. Erfahrung aber gibt ihren Urteilen niemals strenge Allgemeinheit, sondern nur Allgemeinheit durch Induktion. Das heißt der Satz wird nicht in seiner strengen Allgemeinheit gedacht. Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung.

10.4 Definitionen:

1. Ein Urteil heiße "analytisch", wenn sein Prädikat B seinem Subjekt A als etwas zukommt, was im Begriff A (versteckterweise) schon enthalten ist.
2. Ein Urteil heiße "synthetisch", wenn es nicht analytisch ist.

Beispiele dazu: (ohne Beweis)

Erfahrungsurteile sind insgesamt synthetisch (a posteriori).

Der Satz: "Ein Körper ist ausgedehnt" ist analytisch (a priori).

Mit diesen Begriffen läßt sich Metaphysik leicht charakteri-

sieren. Zunächst verlangen wir von metaphysischen Urteilen, daß sie mit Notwendigkeit und in strenger Allgemeinheit gelten. Sie müssen daher Urteile a priori sein. Da wir weiter von metaphysischen Urteilen verlangen, daß sie nicht "bloße Tautologien" seien, sondern einen "echten Erkenntniszuwachs" bedeuten sollen, dürfen sie nicht analytisch, sondern müssen synthetisch sein.

10.5 Kennzeichnung der Metaphysik:

Metaphysik besteht ihrem Zwecke nach aus lauter Urteilen synthetisch-apriorischer Natur.

Da es nach Kant jedoch keine wissenschaftlich betriebene Metaphysik gibt, stellt er jedem neuen Versuch einer Metaphysik die allgemeine Frage voraus:

10.6 "Wie sind synthetische Urteile a priori möglich?"

Er gliedert die Frage folgendermaßen auf:

1. "Wie ist reine Mathematik möglich?"
2. "Wie ist reine Naturwissenschaft möglich?"
3. "Wie ist Metaphysik überhaupt möglich?"
4. "Wie ist Metaphysik als Wissenschaft möglich?"

Die Beantwortung dieser vier Fragen leisten die beiden Teile der "transzendentalen Elementarlehre", die "Transzendental-Ästhetik" und die "Transzendental-Logik".

§ 11. "Wie sind synthetische Urteile a priori möglich?"

Die Beantwortung dieser Frage durch einen Abriß der "transzendentalen Elementarlehre" verlangt einen Hinweis auf Kants eigenartige "Umänderung der Denkart" (Kant (1) S.19), nämlich, "daß die Vernunft nur das einsieht, was sie selbst

nach ihrem Entwurfe hervorbringt" (Kant (1) S.18):

"Bisher nahm man an, alle unsere Erkenntnis müsse sich nach den Gegenständen richten; aber alle Versuche über sie a priori etwas durch Begriffe auszumachen, wodurch unsere Erkenntnis erweitert würde, gingen unter dieser Voraussetzung zunichte. Man versuche es daher einmal, ob wir nicht in den Aufgaben der Metaphysik damit besser fortkommen, daß wir annehmen, die Gegenstände müssen sich nach unserem Erkenntnis richten, welches so schon besser mit der verlangten Möglichkeit einer Erkenntnis derselben a priori zusammenstimmt, die über Gegenstände, ehe sie uns gegeben werden, etwas festsetzen soll." (Kant (1) S.19/20)

Damit ist der Suche nach der Möglichkeit synthetisch-apriorischer Urteile die Richtung gewiesen: Die Mittel, durch welche sich unsere Erkenntnis auf Gegenstände bezieht, werden auf ihre erfahrungsunabhängigen Grundlagen, ihre Bedingungen a priori befragt. Die Wissenschaft, die sich damit beschäftigt, erhält den Zusatz "transzendental". Kant gelangt so zu drei synthetisch-apriorischen Wissenschaften; die "Transzendente Ästhetik" weist auf die Möglichkeit der reinen Mathematik, die "Transzendente Logik" auf die Möglichkeit der reinen Naturwissenschaft und der Metaphysik. Wir verfolgen nun kurz diesen Weg und halten uns dabei an die Ausführungen Kants in den Prolegomena und deren Aufteilung der Frage.

11.1 "Wie ist reine Mathematik möglich?"

Die Urteile der reinen Mathematik sind a priori, da sie absolute Notwendigkeit bei sich führen (Satz 10.2). Sie sind überdies synthetisch. (Eine Begründung dafür liefert Kant im Teil V. der Einleitung seiner "Kritik". Die hier ansetzende Kritik wird später noch kurz erwähnt.)

Die Beantwortung der Frage 11.1 gehört daher für Kant zur Beantwortung der allgemeinen Frage nach der Mög-

lichkeit synthetischer Urteile a priori.

Mathematische Erkenntnis ist intuitiv, indem sie sich in reiner Anschauung, also a priori darstellt. Kant sieht nun die Frage nach der Möglichkeit der reinen Mathematik als gelöst an, wenn er diese zugrundeliegende reine Anschauung wissenschaftlich fassen kann.

11.1.2 Definitionen:

- 1 Die Art und das Mittel, durch das sich eine Erkenntnis auf Gegenstände bezieht, heie ganz allgemein "Anschauung".
- 2 Eine Anschauung, die sich auf ihren Gegenstand durch Empfindung bezieht, heie "empirische Anschauung".
- 3 Eine Anschauung heie "rein", wenn in ihr nichts, was zur Empfindung gehört angetroffen wird.
- 4 Anschauungen werden durch die Sinnlichkeit gegeben. Eine Wissenschaft von allen Prinzipien der Sinnlichkeit a priori heie "transzendente Ästhetik".

11.1.3 Satz: Der Raum ist eine reine Anschauung a priori.

Beweis: a) Der Raum ist eine reine Anschauung.

Der Raum kann kein empirischer Begriff sein, denn damit die Gegenstände im Raum geordnet erscheinen, muß allererst die Vorstellung des Raumes zugrundeliegen.

b) Der Raum ist eine Anschauung a priori.

Es genügt zu zeigen, daß er eine unbedingt notwendige Vorstellung ist (vgl. 15.3).

Dies aber ist der Fall, da man sich niemals eine Vorstellung davon machen kann, daß kein Raum sei.

11.1.4 Satz: Die Zeit ist eine reine Anschauung a priori.

Beweis: a) Die Zeit ist eine reine Anschauung.

Die Zeit kann kein empirischer Begriff sein, denn da die Zustände in der Zeit immer schon geordnet erscheinen, muß die Zeit allererst vorausgesetzt sein.

b) Die Zeit ist eine Anschauung a priori. Es genügt wiederum zu zeigen, daß sie eine unbedingt notwendige Vorstellung ist.

Dies aber ist der Fall, denn man kann wohl alle Erscheinungen in der Zeit in Gedanken aufheben, nicht aber die Zeit selbst.

"Geometrie legt die reine Anschauung des Raums zum Grunde. Arithmetik bringt selbst ihre Zahlbegriffe durch sukzessive Hinzusetzung der Einheiten in der Zeit zustande, vornehmlich aber reine Mechanik kann ihre Begriffe von Bewegung nur vermittelt der Vorstellung der Zeit zustande bringen."

(Kant (2) §10)

Damit sieht Kant diese erste Frage nach der Möglichkeit der reinen Mathematik als gelöst an.

11.2 "Wie ist reine Naturwissenschaft möglich?"

Nach Kant enthält Naturwissenschaft synthetische Urteile a priori als Prinzipien in sich (Kant (1) Einleitung V.2)

Zur Beantwortung der Titelfrage gehört demnach auch die Beantwortung der Frage nach der Möglichkeit einer reinen Naturwissenschaft.

11.2.1 Definitionen:

1 Empirische Urteile, sofern sie objektive Gültigkeit haben, heißen "Erfahrungsurteile".

2 Empirische Urteile, sofern sie subjektive Gültigkeit haben, heißen "Wahrnehmungsurteile".

Alle Erfahrungsurteile sind also empirisch; die Umkehrung des Satzes gilt jedoch nicht.

Die oben gestellte Frage (11.2) nimmt damit die Gestalt an: Wie sind Erfahrungsurteile möglich?

Die Antwort gibt Kant durch drei Tafeln:

- a) die logische Tafel der Urteile,
- b) die transzendente Tafel der Verstandesbegriffe,
- c) die reine physiologische Tafel allgemeiner Grundsätze der Naturwissenschaft.

zu a) Die logische Tafel der Urteile gibt die formalen Bedingungen aller Urteile überhaupt an:

1.

Der Quantität nach

Allgemeine
Besondere
Einzelne

2.

Der Qualität nach

Bejahende
Verneinende
Unendliche

3.

Der Relation nach

Kategorische
Hypothetische
Disjunktive

4.

Der Modalität nach

Problematische
Assertorische
Apodiktische

zu b) Die transzendente Tafel der Verstandesbegriffe gibt die Bedingungen a priori an, die die Begrifflichkeit des Verstandes ermöglicht:

1.

Der Quantität nach

Einheit
Vielheit
Allheit

2.
Der Qualität nach

Realität
Negation
Einschränkung

3.
Der Relation nach

Substanz
Ursache
Gemeinschaft

4.
Der Modalität nach

Möglichkeit
Dasein
Notwendigkeit

zu c) Die reine physiologische Tafel gibt die Grundsätze a priori der Möglichkeit aller Erfahrung an. Durch diese Grundsätze können alle Erscheinungen unter die reinen Verstandesbegriffe subsumiert werden.

1.
Axiome
der Anschauung

2.
Antizipationen
der Wahrnehmung

3.
Analogien
der Erfahrung

4.
Postulate
des empirischen Denkens überhaupt

11.2.2 Damit ist für Kant die Frage nach der Möglichkeit reiner Naturwissenschaft beantwortet.

"Denn das Systematische, was zur Form einer Wissenschaft erfordert wird, ist hier vollkommen anzutreffen, weil über die genannten formalen Bedingungen aller Urteile überhaupt, mithin aller Regeln überhaupt, die die Logik bietet, keine mehr möglich sind, und diese ein logisches System, die darauf gegründ-

ten Begriffe aber, welche die Bedingungen a priori zu allen synthetischen und notwendigen Urteilen enthalten, ebendarum ein transscendentales, endlich die Grundsätze, vermitteltst deren alle Erscheinungen unter diese Begriffe subsumiert werden, ein physiologisches, d.i. ein Natursystem ausmachen, welches vor aller empirischen Naturerkenntnis vorhergeht, diese zuerst möglich macht und daher die eigentliche allgemeine und reine Naturwissenschaft genannt werden kann." (Kant (2) S.63)

11.3 "Wie ist Metaphysik überhaupt möglich?"

11.3.1 Definitionen

- 1 Vernunft sei im folgenden als die Tätigkeit des Aufsteigens von der bedingten Synthesis (an die der Verstand gebunden ist) zur unbedingten (die der Verstand niemals erreichen kann) gekennzeichnet.
- 2 Idee oder Vernunftbegriff heiÙe ein Begriff, dessen Gegenstand in keiner Erfahrung gegeben werden kann, der also die Möglichkeit jeder Erfahrung übersteigt.
- 3 Transzendente Idee oder reiner Vernunftbegriff heiÙt ein Begriff, der die unbedingte synthetische Einheit aller Bedingungen überhaupt leisten will.

Man sieht leicht die analoge Struktur zur Grundlegung der vorhergegangenen synthetisch-apriorischen Naturwissenschaft:

Die reinen Verstandesbegriffe haben die synthetische Einheit des Mannigfaltigen der Anschauung geleistet.

Das heiÙt, die reinen Formen der Anschauung und die reinen Verstandesbegriffe ermöglichten Anschauung und dann Erfahrung allererst.

In Analogie dazu sind die reinen Vernunftbegriffe entworfen; ihre Bestimmung liegt jedoch in einem ganz anderen Bereich. Ihre synthetische Einheit führt nicht erst zur Möglichkeit der Erfahrung oder in den Erfahrungsbereich hinein, sondern baut auf der Erfahrungsmöglichkeit auf und versucht darüber hinauszuführen.

Transzendente Ideen sind auf unbegrenzte Erweiterung des Verstandesgebrauchs angelegt. Sie stellen das Prinzip der systematischen Einheit des Verstandesgebrauchs dar.

Die reine Vernunft fordert die Vollständigkeit des Verstandesgebrauchs im Zusammenhange der Erfahrung.

"Diese Vollständigkeit aber kann nur eine Vollständigkeit der Prinzipien, aber nicht der Anschauungen und Gegenstände sein. Gleichwohl, um sich jene bestimmt vorzustellen, denkt sie sich solche als Erkenntnis eines Objekts, dessen Erkenntnis in Ansehung jener Regeln vollständig bestimmt ist, welches Objekt aber nur eine Idee ist, um die Verstandeserkenntnis der Vollständigkeit, die jene Idee bezeichnet, so nahe wie möglich zu bringen." (Kant (2) S.94)

Damit ist Metaphysik in ihrer Möglichkeit überhaupt angezeigt. Ihre Dialektik ist das Zeichen für den Mißbrauch einer Erkenntnisart, die eigentlich nur regulativ und nicht konstitutiv ist. Transzendente Ideen dienen der Vollständigkeit in der Erfahrung und nicht zur Ausdehnung der Erkenntnis über jede Erfahrung.

Der bloß natürliche Gebrauch der metaphysischen Anlage der Vernunft verwickelt sich in Widersprüche. Trotzdem bleibt für Kant die Frage, worauf diese transzendenten Begriffe abgezielt sein mögen, da er erwartet, daß alles, was in der Natur liegt, auf

irgendeine nützliche Absicht ursprünglich angelegt sein muß.

11.4 "Wie ist Metaphysik als Wissenschaft möglich?"

11.4.1 "Metaphysik, als Naturanlage der Vernunft, ist wirklich, aber sie ist auch für sich allein dialektisch und trüglich." (Kant (2) S.133)

11.4.2 Wenn Metaphysik Wissenschaft werden soll, kann es also nicht bloß beim natürlichen Gebrauch der metaphysischen Anlage der Vernunft bleiben. Die reine Vernunft braucht eine genaue Eingrenzung ihres Vermögens, damit ihr Gebrauch nicht ohne Anleitung sei und in einer trügerischen Dialektik verlaufe. Kann eine solche Anleitung geschaffen werden, so ist die Möglichkeit zu einer wissenschaftlichen Metaphysik gegeben. Wissenschaftliche Metaphysik hat daher nach Kant keine andere Möglichkeit, als durch eine Kritik der Vernunft den ganzen Vorrat der Begriffe a priori, deren Einteilung, Grundsätze des Gebrauchs und Grenzen in einem vollständigen System darzulegen.

11.4.3 "Also enthält Kritik und auch sie ganz allein den ganzen wohlgeprüften und bewährten Plan, ja sogar alle Mittel der Vollziehung in sich, wonach Metaphysik als Wissenschaft zustande gebracht werden kann; durch andere Wege und Mittel ist sie unmöglich." (Kant (2) S.134)

11.4.4 Da Vernunftserkenntnis sich nicht auf Gegenstände und deren Anschauung bezieht, erweitert sich ihr Bereich auch nicht. Wenn die Vernunft daher die Quellen ihrer Erkenntnis dargestellt hat, bleibt nichts übrig, was reine Vernunft a priori erkennen könnte.

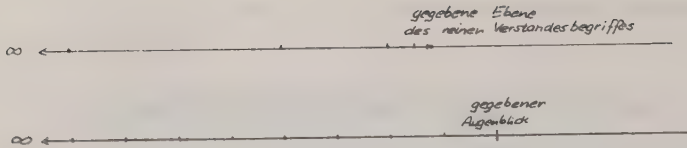
Damit verspricht die Metaphysik den Vorzug zu haben, daß sie eines Tages zur tatsächlichen Vollen-

dung gelangen kann.

§ 12. eine Interpretation des Kantischen Versuches

12.1 Eine anschauliche Erläuterung

- 12.1.1 Kant ist der Auffassung, daß nur die "aufsteigende Reihe der Bedingungen zu einem gegebenen Bedingten" die Grundlage zu Antinomien abgeben kann, nämlich insofern sie in ihrer Totalität gedacht wird.
- 12.1.2 Die reinen Verstandesbegriffe oder Kategorien, die Kant in jeder Erfahrung antrifft und die daher die Grundlage jeder Erfahrung ausmachen, sind aus einer Analytik der Urteile gewonnen. Sie stellen sich zwar, von der Ebene der Anschauung als eine Einheit der Synthesis der Mannigfaltigkeit der Anschauung dar, trotzdem können sie nicht als gegebenes Bedingtes zu einer aufsteigenden Reihe von Bedingungen interpretiert werden, da zwischen der Mannigfaltigkeit der Anschauung, die man vielleicht als Reihe der Bedingungen darstellen könnte, und den Verstandesbegriffen ein logischer Bruch besteht, obwohl die reinen Verstandesbegriffe als Totalität jener aufsteigenden Reihe von Bedingungen interpretiert werden könnten.
- 12.1.3 Die reinen Verstandesbegriffe sind ontologisch etwas völlig Neues gegenüber jeder Anschauung. Die Anschauungen, die man vielleicht künstlich in einer aufsteigenden Reihe anordnen könnte, hätten in ihrer Reihe immer wieder einen Nachfolger, der kein Verstandesbegriff wäre. Entsprechend hat der reine Verstandesbegriff in dieser Reihe keinen Vorgänger. Dies läßt sich folgendermaßen in einer Zeichnung darstellen:



- 12.1.4 Auf diese Weise werden die reinen Verstandesbegriffe nicht als Grenze einer aufsteigenden Reihe gefaßt, sondern als Bedingung a priori all unserer Erfahrung. Sie entgehen dadurch bei Kant einer antinomischen Bestimmung.
- 12.2 Eine Interpretation mithilfe der Ordinalzahlreihe
- 12.2.1 Wir befinden uns je schon auf einer Ebene der Einheit einer unendlichen Synthesis der Mannigfaltigkeit der Anschauung.
- 12.2.2 Wir interpretieren daher den Bereich der Anschauung als die Menge der endlichen (natürlichen) Zahlen, den Bereich des Verstandes als die Menge der rationalen Zahlen.
- 12.2.3 Eine Abzählung soll nun zuerst die natürlichen Zahlen in der gegebenen Relation ihrer Größe wohlordnen. Dann ist ω die kleinste unendliche Zahl (vgl. 3.13.1); wie wir wissen ist ω additive Hauptzahl, das heißt sie läßt sich nicht als Addition (Synthesis) zweier beliebiger natürlicher Zahlen (Anschauungen) darstellen und Limeszahl, das heißt eine Zahl, die nicht direkt auf eine andere folgt (vgl. 3.14).
- 12.2.4 Die Abzählung kann nun weitergehen, indem man die rationalen Zahlen in Mengen mit gleichen Nennern einteilt. Eine Wohlordnung ergibt sich, wenn man dann die Mengen nach steigender Größe ihrer Nenner, und die Elemente der Mengen nach steigender Größe ihrer Zähler abzählt. Natürlich müssen dabei die Zahlen, die schon einmal vorgekommen sind ausgelassen werden. Es

läßt sich folgendes Schema angeben:

1	$\frac{1}{2} \omega \cdot 1$	$\frac{1}{3} \omega \cdot 2 + 1$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	...
2	$(\frac{2}{2})$	$\frac{2}{3} \omega \cdot 2 + 2$	$(\frac{2}{4})$	$\frac{2}{5}$	...
3	$\frac{3}{2} \omega \cdot 2$	$(\frac{3}{3})$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	...
4	$(\frac{4}{2})$	$\frac{4}{3} \omega \cdot 2 + 3$	$(\frac{4}{4})$	$\frac{4}{5}$	...
5	$\frac{5}{2} \omega \cdot 3$	$\frac{5}{3} \omega \cdot 2 + 4$	$\frac{5}{4}$	$(\frac{5}{5})$	...
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
ω	$\omega \cdot 2$	$\omega \cdot 3$	$\omega \cdot 4$	$\omega \cdot 5$	ω^2

Wir befinden uns mit der Begrifflichkeit des Verstandes immer schon in einem Bereich, in dem die Abzählung bis ω geleistet ist.

12.2.5 Der Übergang von den endlichen zu den unendlichen Ordinalzahlen ließ sich durch eine Verallgemeinerung des Begriffs der Abzählung zum Begriff der Wohlordnung bewerkstelligen (vgl. 2 und 3).

In der transzendentalen Logik besteht die Schwierigkeit, daß die Sinnlichkeit zwar Anschauungen liefert, aber diese Anschauungen in ihrer Sinnlichkeit noch nicht zur Erfahrung (für Erfahrungswissenschaft) taugen. Daher muß durch irgendeine Funktion die Einheit der Anschauungen geleistet werden. Zu diesem Zweck zielen bei Kant die reinen Verstandesbegriffe direkt auf die Sinnlichkeit a priori, die in der transzendentalen Ästhetik zergliedert wurde. Durch eine allgemeine Funktion - die wir als verallgemeinerten Begriff der Abzählung interpretieren könnten - wird die Möglichkeit gegeben, die Einheit der Anschauung zu erreichen und darüber hinaus zur Erfahrung zu gelangen.

Diese allgemeine Funktion oder Handlung des Verstandes heißt bei Kant der reine Verstandesbegriff.

Durch den reinen Verstandesbegriff wird überhaupt die Möglichkeit gegeben in Begriffen zu denken.

12.2.6 Wenn wir eine Theorie vorliegen haben, dann können wir deren Begriffe durch Zuordnung "konkreter" Gegenstände interpretieren.

In diesem Sinne ist es wahrscheinlich möglich der allgemeinen Theorie der Mengenlehre, deren Anwendung sich nicht unbedingt auf Mengen bezieht, sondern auf alle "Gegenstände", die den Axiomen genügen, in der Kantischen Theorie der Anschauung, des Verstandes und der Vernunft ein Modell zu geben.

Eine Ausführung des Gedankens kann hier nicht geleistet werden, da zu diesem Zweck einerseits die Mengenlehre in vollständigem Umfang vorgelegt werden müßte, andererseits auch die Theorie Kants in ihren Begriffen sehr gründlich geklärt werden müßte, um eine eindeutige Zuordnung überhaupt möglich zu machen.

2. Abschnitt: Der mathematische Weg

=====

Kant behauptet in seiner "Kritik der reinen Vernunft", daß die Mathematik eine synthetische Wissenschaft sei. An dieser Behauptung hat Gottlob Frege in seinen "Grundlagen der Arithmetik" angesetzt und der Kantischen These widersprochen. In den "Grundgesetzen der Arithmetik" versuchte er dann den Beweis dafür zu liefern, daß die Arithmetik eine logische, also eine analytische Wissenschaft ist.

Zu diesem Zweck schuf er eine Erweiterung der aristotelischen Logik, die es jedoch in Zusammenhang mit der neuentwickelten Mengenlehre erlaubte, in völlig korrekter Weise Widersprüche herzuleiten. Die Grundlagenkrisis der Mathematik, die dadurch heraufbeschworen wurde, führte dann zur Ausbildung der axiomatischen Mengenlehre.

Die axiomatische Mengenlehre ist ein prädikatenlogisches System mit den beiden einzigen Prädikaten $\in$ (Elementschaftsrelation) und $=$ (Gleichheitsrelation). Wir bringen daher zunächst einen Überblick über die Grundbegriffe der Aussagenlogik und der Prädikatenlogik.

Wir unterscheiden dabei folgendermaßen zwischen Objekt- und Metabereich der logischen Theorie: Im Objektbereich wird ein logisches System in semantischer (§13) und syntaktischer (§14) Hinsicht angegeben. Die Metatheorie liefert dann (§15) Aussagen über das logische System.

In der Semantik betrachten wir die logische Bedeutung von Aussagen auf der Basis einer Bewertung durch Wahrheitswerte; in der Syntaktik wird der Wahrheitsbegriff durch die Herleitbarkeit aus Grundformeln (Axiomen) mithilfe von Grundschlußregeln definiert.

Im folgenden geben wir ein allgemein übliches logisches System durch eine zweiwertige Semantik und das Axiomensystem von Kleene (1) an und zeigen die Übereinstimmung

der beiden, durch Semantik und Syntaktik definierten, Wahrheitsbegriffe (Konsistenzsatz und Vollständigkeitsatz).

Auf die folgenden Ausführungen werden wir uns dann insbesondere in Kapitel III stützen, wenn wir eine dreiwertige Aussagenlogik auf ihre Konsistenz und Vollständigkeit hin untersuchen.

§ 13. Aussagenlogik mit Wahrheitswerten

13.1 Aussagen

Wir betrachten ganze Aussagesätze, kurz Aussagen. Es interessieren uns nicht bestimmte Aussagen mit ihren inhaltlich bedingten Eigenschaften, sondern nur Aussagen in ihrer formalen Allgemeinheit, ohne Rücksicht auf ihre innere sprachliche Struktur; das heißt, wir interessieren uns für Eigenschaften, die für alle Aussagen in Absehung ihres Inhaltes gelten.

Aus diesem Grunde gebrauchen wir Aussagenvariablen. Aussagenvariablen werden durch vereinbarte Zeichen mitgeteilt; Mitteilungszeichen seien hier große lateinische Buchstaben aus dem Ende des Alphabets, mit und ohne Indizes:

$$U, V, W, U_1, V_1, W_1, \dots$$

Unsere Betrachtungsweise ist formel in dem Sinne, daß wir keinen Anspruch darauf erheben wollen, etwas über das tatsächliche "Sein" von Aussagen zu wissen. Indem wir formal Aussagen "untersuchen" behaupten wir nicht einmal dieses: Es gibt Aussagen.

13.2 Wahrheitswerte

Aussagen können wahr oder falsch sein, je nachdem, ob der durch die Aussage bezeichnete Sachverhalt tatsächlich zutrifft oder nicht.

Liegt eine Aussage in der Gegenwartsform vor, so können wir annehmen, daß ihre Wahrheit oder Falschheit entscheidbar ist. Liegt eine Aussage über die Vergangenheit vor, so können wir die Wahrheit im einzelnen Fall vielleicht nicht entscheiden, können aber annehmen, daß sie, bei genügender Kenntnis, grundsätzlich entscheidbar ist. Liegt eine Aussage in der Zukunftsform vor, so wollen wir annehmen, daß sie nach genügend langer Wartezeit entscheidbar ist. (vgl. Kap. III)

Allgemein wollen wir daher annehmen, daß Aussagen immer entweder wahr oder falsch sind.

Da aber eine Verifikation oder Falsifikation, oder überhaupt die Verifizierbarkeit von Aussagen nicht Gegenstand einer formalen Theorie ist, behalten die Wahrheitswerte rein formalen Charakter.

Als Mitteilungszeichen für die beiden Wahrheitswerte verwenden wir die Ziffern 0 für "falsch" und 1 für "wahr".

13.3 Verknüpfungen

Aussagen können miteinander verknüpft werden; wir erhalten dann neue Aussagen, die wiederum wahr oder (ausschließend) falsch sind, entsprechend den Wahrheitswerten der anfänglichen Aussagen.

Durch den zweistelligen Junktor $\wedge$ beispielsweise, wird den Aussagen U und V die Aussage $(U \wedge V)$ zugeordnet, die genau dann wahr sein soll, wenn U und V selbst wahr sind. Man sieht, daß der Junktor $\wedge$ die logische Bedeutung von "und" hat.

Allgemein wird n Aussagen durch Verknüpfung mittels eines Junktors eine neue Aussage zugeordnet. Der Junktors hat dabei die Rolle einer n -stelligen Wahrheitsfunktion, die einem n -tupel von Wahrheitswerten wieder genau einem Wahrheitswert zuordnet.

Wir gebrauchen folgende Wahrheitsfunktionen:

1. 1-stellig: die Negation:

Die Negation einer Aussage ist genau dann wahr, wenn die Aussage selbst falsch ist. Das bedeutet: Die Negation einer Aussage erhält genau dann den Wert 1, wenn die Aussage selbst den Wert 0 hat. Wir schreiben dies in folgender Gestalt als "Wahrheitstabelle":

U	$\neg U$
0	1
1	0

2. 2-stellig: die Adjunktion

Die Adjunktion zweier Aussagen ist genau dann falsch (erhält genau dann den Wert 0), wenn beide Aussagen falsch sind (den Wert 0 haben).

Wahrheitstabelle:

U	V	$U \vee V$	oder:	$U \vee V$	0	1
1	1	1		0	0	1
1	0	1		1	1	1
0	1	1				
0	0	0				

3. 2-stellig: die Konjunktion

Die Konjunktion zweier Aussagen erhält genau dann den Wert 1, wenn beide Aussagen den Wert 1 haben.

Wahrheitstabelle:

$U \wedge V$	0	1
0	0	0
1	0	1

4. 2-stellig: die (materiale) Implikation

Die Implikation $U \rightarrow V$ erhält genau dann den Wert 0, wenn U den Wert 1 und V den Wert 0 hat.

Wahrheitstabelle:

$U \rightarrow V$	0	1
0	1	1
1	0	1

5. 2-stellig: die Äquivalenz

Zwei Aussagen einer Äquivalenz machen diese genau dann wahr, wenn beide Aussagen den gleichen Wahrheitswert haben.

Wahrheitstabelle:

$U \leftrightarrow V$	0	1
0	1	0
1	0	1

Zur Vermeidung überflüssiger Klammern vereinbaren wir:

$\wedge$ und $\vee$ binden stärker als $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$.

Gewisse Zeichenreihen werden nun als neue Aussagen ausgezeichnet.

13.4 Induktive Definition der Aussageform:

(im Sinne von Schütte (2): "'Induktive Definition' soll hier und im folgenden stets implizieren, daß die Definition vollständig angegeben ist in dem Sinne, daß dann und nur dann einer Zeichenreihe die definierte Eigenschaft zukommt, wenn sie sie auf Grund einer endlichen Anzahl von Anwendungen der angegebenen Definitionsregeln besitzt.")

1. Jede Aussagenvariable ist eine Aussageform.
2. Ist U eine Aussageform, so ist auch $\neg U$ eine Aussageform.
3. Sind U und V Aussageformen, so sind auch $(U \wedge V)$, $(U \vee V)$, $(U \rightarrow V)$ und $(U \leftrightarrow V)$ Aussageformen.

13.5 Definition der Belegung:

Eine Belegung IB einer Aussageform ist eine Zuordnung von je einem Wahrheitswert zu jeder Aussagenvariablen dieser Aussageform.

13.6 Definition der semantischen Folgerung und der semantischen Äquivalenz:

1. Eine Aussageform B folgt semantisch aus einer Aussageform A , in Zeichen $A \models B$, genau dann, wenn B bei jeder Belegung IB den Wert 1 erhält, bei der A den Wert 1 erhält.
2. Zwei Aussageformen A und B heißen semantisch äquivalent, in Zeichen $A \models B$, genau dann, wenn gilt: A folgt semantisch aus B und B folgt semantisch aus A .

13.7 Satz: A und B seien Aussageformen. Dann gilt:

$$1. \quad A \rightarrow B \models \neg A \vee B$$

Zum Beweis betrachten wir die Wahrheitstabellen:

A	$\neg A$	B	$A \rightarrow B$	$\neg A \vee B$
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	1

$$2. \quad A \leftrightarrow B \models (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

Wir betrachten wieder die Wahrheitstabellen:

A	B	$A \leftrightarrow B$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	1

13.8 Definition der Gültigkeit:

1. Eine Aussageform heißt allgemeingültig, wenn sie bei jeder Belegung IB den Wert 1 erhält.
2. Eine Aussageform heißt erfüllbar, wenn es eine Belegung IB gibt, so daß die Aussageform den Wert 1 erhält.
3. Eine Aussageform heißt unerfüllbar, wenn sie bei jeder Belegung IB den Wert 0 erhält.

Bem.: Eine Aussageform ist genau dann allgemeingültig, wenn ihre Negation unerfüllbar ist.

13.9 Satz: A und B seien Aussageformen. Dann gilt:

1. B folgt genau dann semantisch aus A, wenn die Aussageform $A \rightarrow B$ allgemeingültig ist.
2. A und B sind genau dann semantisch äquivalent, wenn die Aussageform $A \leftrightarrow B$ allgemeingültig ist.

Die Beweise zu 1. und 2. folgen aus den entsprechenden Definitionen.

13.10 Beispiele allgemeingültiger Formeln:

$A \rightarrow A$	$A \vee \neg A$	"tertium non datur"
1 1 1	1 1 0 1	
0 1 0	0 1 1 0	

$\neg(A \wedge \neg A)$	"principium contradictionis"
1 1 0 0 1	
1 0 0 1 0	

$A \wedge \neg A \rightarrow B$	"ex falso quodlibet"
1 0 0 1 1 1	
1 0 0 1 1 0	
0 0 1 0 1 1	
0 0 1 0 1 0	

$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$ "reductio ad absurdum"

1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0

Die Prüfung der Allgemeingültigkeit einer Aussageform läßt sich dadurch vereinfachen, daß man nur die Fälle untersucht, in denen die ganze Formel falsch wird. Im obigen Fall muß dazu $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$ falsch werden; dafür ist aber wiederum Bedingung, daß $\neg A$ falsch ist, damit aber muß $\neg B$ wahr sein, also B selbst falsch. Daraus folgt aber, daß $A \rightarrow B$ falsch ist, damit wird die ganze Implikation wahr, womit der einzige Fall ausgeschlossen ist, in dem die Aussageform den Wert 0 annehmen könnte.

§ 14. Ein formales System der Aussagenlogik

Die syntaktische Angabe eines logischen Systems geschieht durch vier Momente:

- a) Grundzeichen; das sind die vereinbarten Zeichen des Objektbereiches.
- b) Formeln; das sind gewisse Reihen von Grundzeichen. Die Menge der Formeln ist immer eine Teilmenge der Menge der Aussageformen.
- c) Axiome; das sind gewisse ausgezeichnete Formeln, die die Grundlage zur Herleitung anderer Formeln bilden.
- d) Grundsatzregeln; das sind gewisse Formelschemata, mit deren Hilfe aus den Axiomen auf andere Formeln geschlossen werden kann.

14.1 Grundzeichen:

1. Aussagenvariablen

2. Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
3. Runde Klammern

14.2 Induktive Definition der Formeln:

1. Jede Aussagenvariable ist eine Formel.
2. Ist A eine Formel, so ist auch $\neg A$ eine Formel.
3. Sind A und B Formeln, so sind auch $(A \wedge B)$,
 $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ Formeln.

Mitteilungszeichen:

$U, V, W, U_1, \dots$ für Aussagenvariablen
 $A, B, C, A_1, \dots$ für Formeln

14.3 Axiome und einziger Grundschiuß (nach Kleene (1)):

- 1a. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- 1b. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- S2. $A, A \rightarrow B \vdash B$
3. $A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$ Konjunktionseinführung
- 4a. $A \wedge B \rightarrow A$
- 4b. $A \wedge B \rightarrow B$ Konjunktionsbeseitigung
- 5a. $A \rightarrow A \vee B$
- 5b. $B \rightarrow A \vee B$ Adjunktionseinführung
6. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$
7. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$
8. $\neg \neg A \rightarrow A$

Die einzige Grundschiußregel ist durch 2. angegeben:
 Aus A und $A \rightarrow B$ läßt sich auf B schließen (modus ponens). Das Komma und das Zeichen $\vdash$ sind dabei metasprachliche Zeichen, gehören deshalb nicht zu den in 14.1 angegebenen Grundzeichen des formalen Systems.

14.4 Damit läßt sich die Herleitbarkeit im formalen System

induktiv definieren:

1. Jedes Axiom ist herleitbar.
2. Sind die Prämissen eines Grundschlusses herleitbar, so ist auch die Konklusion herleitbar.

14.5 Beispiele herleitbarer Formeln mit ihrer Herleitung:

1. $A \rightarrow A$

Herleitung:

B sei eine beliebige herleitbare Formel, zum Beispiel ein Axiom.

1. $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ Ax. 1a.
2. B Ax. nach Vor.
3. $A \rightarrow B$ mit Schluß 2. aus 1. und 2.
4. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ Ax. 1b.
5. $(A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ mit s.2. aus 3. und 4.
6. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ Ax. 1a.
7. $A \rightarrow A$ mit S.2 aus 5. und 6.

2. $\neg(A \wedge \neg A)$

Herleitung:

1. $A \wedge \neg A \rightarrow A$ Ax. 4a.
2. $A \wedge \neg A \rightarrow \neg A$ Ax. 4b.
3. $(A \wedge \neg A \rightarrow A) \rightarrow ((A \wedge \neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(A \wedge \neg A))$ Ax. 7.
4. $(A \wedge \neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(A \wedge \neg A)$ mit S.2 aus 1. u. 3
5. $\neg(A \wedge \neg A)$ mit S.2. aus 2. und 4.

§ 15. Metatheoretische Sätze zur Aussagenlogik

15.1 Deduktionstheorem:

Es sei Γ eine Formelmenge und A eine Formel. Dann gilt: Aus $\Gamma, A \vdash B$ folgt $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Beweis: (durch Induktion nach der Länge der Herleitung von B)

1. Die Länge der Herleitung von B sei 1, das heißt, B ist aus Γ , aus der Menge der Axiome oder die Formel A selbst.

a) B ist aus Γ :

1. B nach Vor.
2. $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ Ax. 1a.
3. $A \rightarrow B$ mit S.2. aus 1. und 2.

b) B ist ein Axiom:

Die Herleitung von $A \rightarrow B$ erfolgt analog a).

c) B ist die Formel A :

1. C sei beliebige herl. Formel (Axiom)
2. $C \rightarrow (A \rightarrow C)$ Ax. 1a.
3. $A \rightarrow C$ mit S.2. aus 1. und 2.
4. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B))$ Ax. 1b.
5. $(A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$ mit S.2. aus 3. u. 4.
6. $A \rightarrow (C \rightarrow B)$ Ax. 1a. da A die Formel B ist
7. $A \rightarrow B$ mit S.2. aus 5. und 6.

2. Die Länge der Herleitung sei $n+1$:

Die Induktionsvoraussetzung besagt, daß die Behauptung für die Länge n der Herleitung von B bewiesen ist.

a) - c) wie unter 1)

d) B ist mit S.2. aus den Prämissen P und $P \rightarrow B$ erschlossen. Für P und $P \rightarrow B$ gilt nach der Induktionsvoraussetzung: $\Gamma \vdash_n A \rightarrow P$ und $\Gamma \vdash_n A \rightarrow (P \rightarrow B)$. Mit Axiom 1b. und zweimaliger Anwendung von S.2. erhält man daraus $A \rightarrow B$:

- k. $A \rightarrow P$ nach Ind.Vor.
- k+1. $A \rightarrow (P \rightarrow B)$ nach I.V.
- k+1+1. $(A \rightarrow P) \rightarrow ((A \rightarrow (P \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B))$ Ax. 1b.
- k+1+2. $(A \rightarrow (P \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$ mit 2. aus k. und k+1+1.

$k+1+3.$ $A \rightarrow B$ mit S.2. aus $k+1+2.$ und $k+1$

Mit Hilfe des Deduktionstheorems kann man auf einfache Weise weitere Formeln herleiten:

15.2 Anwendungsbeispiele zum Deduktionstheorem:

1. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

Herleitung:

1. $\neg A, A, \neg B \vdash A$ klar
2. $\neg A, A \vdash \neg B \rightarrow A$ mit Ded.Th. aus 1.
3. $\neg A, A, \neg B \vdash \neg A$ klar
4. $\neg A, A \vdash \neg B \rightarrow \neg A$ mit Ded.Th. aus 3.
5. $(\neg B \rightarrow A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg \neg B)$ Ax. 7.
6. $\neg A, A \vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg \neg B$ mit S.2. aus 2. u. 5.
7. $\neg A, A \vdash \neg \neg B$ mit S.2. aus 4. und 5.
8. $\neg \neg B \rightarrow B$ Ax. 8.
9. $\neg A, A \vdash B$ mit S.2. aus 7. und 8.
10. $\neg A \vdash A \rightarrow B$ mit Ded.Th. aus 9.
11. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ mit Ded.Th. aus 10.

2. $A \vee \neg A$

Herleitung:

1. $\neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A)$
2. $\neg(A \vee \neg A) \vdash A \rightarrow \neg(A \vee \neg A)$ mit Ded.Th. aus 1.
3. $A \rightarrow A \vee \neg A$ Ax. 5a.
4. $(A \rightarrow A \vee \neg A) \rightarrow ((A \rightarrow \neg(A \vee \neg A)) \rightarrow \neg \neg A)$ Ax. 7.
5. $(A \rightarrow \neg(A \vee \neg A)) \rightarrow \neg \neg A$ mit S.2. aus 3., 4.
6. $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A$ mit S.2. aus 2., 5.
7. $\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg A$ mit Ded.Th. aus 6.
8. $\neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A)$
9. $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A \rightarrow \neg(A \vee \neg A)$ mit Ded.Th. aus 8.
10. $\neg A \rightarrow A \vee \neg A$ Ax. 5b.
11. $(\neg A \rightarrow A \vee \neg A) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg(A \vee \neg A)) \rightarrow \neg \neg A)$ Ax. 7.
12. $(\neg A \rightarrow \neg(A \vee \neg A)) \rightarrow \neg \neg A$ mit S.2. aus 10., 11.
13. $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg \neg A$ mit S.2. aus 9., 12.

14. $\neg A \rightarrow A$ Ax. 8.
15. $\neg(A \vee \neg A) \vdash A$ mit S.2. aus 13., 14.
16. $\neg(A \vee \neg A) \rightarrow A$ mit Ded.Th. aus 15.
17. $(\neg(A \vee \neg A) \rightarrow A) \rightarrow ((\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(A \vee \neg A))$
Ax. 7.
18. $(\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(A \vee \neg A)$ mit S.2. aus 16, 17.
19. $\neg(A \vee \neg A)$ mit S.2. aus 7. und 18.
20. $\neg(A \vee \neg A) \rightarrow A \vee A$ Ax. 8.
21. $A \vee A$ mit S.2. aus 19. und 20.

15.3 Konsistenzsatz:

Jede herleitbare Formel ist allgemeingültig

Beweis: (durch Herleitungsinduktion)

1. Jedes Axiom ist allgemeingültig (Beweis durch Belegung)
2. Sei B eine herleitbare Formel, die kein Axiom ist. Da S.2. der einzige Grundsatz ist, gibt es eine herleitbare Formel A und eine herleitbare Formel $A \rightarrow B$, so daß B mit S.2. aus A und $A \rightarrow B$ erschlossen wurde. Die herleitbaren Formeln A und $A \rightarrow B$ sind nach Induktionsvoraussetzung allgemeingültig.

Es ist nun zu zeigen, daß auch die Formel B allgemeingültig ist.

Angenommen, B ist nicht allgemeingültig; dann muß es eine Belegung IB_1 geben, so daß $IB_1(B) = 0$ ist, d.h. falsch ist. Da A für jede Belegung IB den Wert 1 (nach I.V.) erhält, gibt es eine Belegung IB_2 - nämlich IB_1 für alle Aussagenvariablen der Formel $A \rightarrow B$, die in B auftreten, und eine beliebige Belegung IB für alle anderen Aussagenvariablen von $A \rightarrow B$ - so daß $A \rightarrow B$ den Wert 0 erhält, das heißt aber, nicht allgemeingültig ist.

Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung.

15.4 Vollständigkeitssatz:

Jede allgemeingültige Formel ist herleitbar.

Beweis:

$U_1, \dots, U_n$ seien genau diejenigen Aussagenvariablen, die in einer gegebenen Formel C auftauchen. Für eine gegebene Belegung IB seien $A_1, \dots, A_n$ diejenigen Formeln, die sich nach folgender Vorschrift aus den $U_1, \dots, U_n$ darstellen lassen:

$$A_i = \neg U_i \quad \text{für} \quad IB(U_i) = 0$$

$$A_i = U_i \quad \text{für} \quad IB(U_i) = 1$$

Dabei ist i aus der Menge $\{1, \dots, n\}$

Lemma 1: Für jede gegebene Belegung IB gilt:

$A_1, \dots, A_n \vdash C$ oder $A_1, \dots, A_n \vdash \neg C$
entsprechend $IB(C)=1$ oder $IB(C)=0$

Beweis: (durch Induktion nach der Anzahl der in C auftretenden Junktoren)

1. Es taucht kein Junktor auf. Daraus folgt: $C = U_1$.
 - a) Angenommen, $IB(U_1) = 0$, dann ist $A_1 = \neg U_1$ herleitbar, d.h. C ist herleitbar und $IB(C) = 0$.
 - b) Angenommen, $IB(U_1) = 1$, dann ist $A_1 = U_1$ herleitbar, d.h. C ist herleitbar und $IB(C) = 1$.
2. Es tauchen $d+1$ Junktoren auf. Nach der Induktionsvoraussetzung ist die Behauptung für d Junktoren bewiesen.
 - a) Angenommen, C hat die Gestalt $A \wedge B$. Es sind folgende vier Fälle möglich:
 - ✓) A und B sind beide herleitbar.
 1. A nach I.V.
 2. $A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$ Ax. 3.
 3. $B \rightarrow A \wedge B$ mit S.2. aus 1. und 2.
 4. B nach I.V.
 5. $A \wedge B$ mit S.2. aus 3. und 4.

Damit ist C herleitbar; außerdem gilt $IB(C) = 1$
für $IB(A) = 1$ und $IB(B) = 1$.

β) A und B sind herleitbar.

1. $(A \wedge B \rightarrow A) \rightarrow ((A \wedge B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(A \wedge B))$ Ax. 7.
2. $A \wedge B \rightarrow A$ Ax. 4a.
3. $(A \wedge B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(A \wedge B)$ mit S.2. aus 1. und 2.
4. $\neg A$ nach I.V.
5. $\neg A \rightarrow (A \wedge B \rightarrow \neg A)$ Ax. 1a.
6. $A \wedge B \rightarrow \neg A$ mit S.2. aus 4. und 5.
7. $\neg(A \wedge B)$ mit S.2. aus 3. und 6.

Damit ist C herleitbar; außerdem gilt $IB(C) = 0$
für $IB(A) = 0$ und $IB(B) = 1$.

γ) $\neg A$ und $\neg B$ sind herleitbar.

$\neg(A \wedge B)$ ist analog α) herleitbar. Es gilt $IB(C) = 0$
für $IB(A) = 0$ und $IB(B) = 0$.

δ) A und $\neg B$ sind herleitbar.

Die Herleitung von $\neg(A \wedge B)$ erfolgt analog α), mit
Ax. 4b. statt Ax. 4a. Es gilt $IB(C) = 0$.

b) Angenommen, C hat die Gestalt $A \vee B$.

α) A und B sind herleitbar.

1. A nach I.V.
2. $A \rightarrow A \vee B$ Ax. 5a.
3. $A \vee B$ mit S.2. aus 1. und 2.

C ist herleitbar; es gilt $IB(C) = 1$.

β) $\neg A$ und B sind herleitbar.

1. B nach I.V.
2. $B \rightarrow A \vee B$ Ax. 5b.
3. $A \vee B$ mit S.2. aus 1. und 2.

C ist herleitbar; es gilt $IB(C) = 1$.

γ) $\neg A$ und $\neg B$ sind herleitbar.

1. $\neg A$ nach I.V.
2. $\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A \wedge \neg B)$ Ax. 3.
3. $\neg B \rightarrow \neg A \wedge \neg B$ mit S.2. aus 1. und 2.

4. $\neg B$ nach I.V.
5. $\neg A \wedge \neg B$ mit S.2. aus 3. und 4.
6. $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B))$ Ax. 1a.
7. $(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ mit S.2. aus 5. und 6.
8. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B))$ ist herleitbar (15.2.1)
9. $A \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$ mit S.2. aus 1. und 8.
10. $\neg B \rightarrow (B \rightarrow (\neg A \wedge \neg B))$ ist herleitbar (15.2.1)
11. $B \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$ mit S.2. aus 4. und 10.
12. $(A \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)) \rightarrow ((B \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)) \rightarrow (A \vee B \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)))$
Ax. 6.
13. $(B \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)) \rightarrow (A \vee B \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B))$ mit S.2. aus
9. und 12.
14. $A \vee B \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$ mit S.2. aus 11. und 13.
15. $(A \vee B \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)) \rightarrow ((A \vee B \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)) \rightarrow \neg(A \vee B))$
Ax. 7.
16. $(A \vee B \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)) \rightarrow \neg(A \vee B)$ mit S.2. aus 7.
und 15.
17. $\neg(A \vee B)$ mit S.2. aus 14. und 16.

C ist herleitbar; es gilt $IB(C) = 0$.

δ) A und $\neg B$ sind herleitbar.

Die Herleitung von $A \vee B$ erfolgt analog α).

C ist herleitbar; es gilt $IB(C) = 1$.

c) Angenommen, C hat die Gestalt $A \rightarrow B$.

α) A und B sind herleitbar.

1. B nach I.V.
2. $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ Ax. 1a.
3. $A \rightarrow B$ mit S.2. aus 1. und 2.

C ist herleitbar; es gilt $IB(C) = 1$.

β) $\neg A$ und B sind herleitbar.

1. $\neg A$ nach I.V.
2. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ ist herleitbar (15.2.1)
3. $A \rightarrow B$ mit S.2. aus 1. und 2.

C ist herleitbar; es gilt $IB(C) = 1$.

γ) $\neg A$ und $\neg B$ sind herleitbar.

Die Herleitung von $A \rightarrow B$ erfolgt analog β).

C ist herleitbar; es gilt $IB(C) = 1$.

δ) A und $\neg B$ sind herleitbar.

1. $A, A \rightarrow B \vdash B$ S.2.
2. $A \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow B$ mit Ded.Th. aus 1.
3. $A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$ mit Ded.Th. aus 2.
4. A nach I.V.
5. $(A \rightarrow B) \rightarrow B$ mit S.2. aus 3. und 4.
6. $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$ Ax. 7.
7. $((A \rightarrow B) \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$ mit S.2. aus 5. und 6.
8. $\neg B$ nach I.V.
9. $\neg B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow \neg B)$ Ax. 1a.
10. $(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B$ mit S.2. aus 8. und 9.
11. $\neg(A \rightarrow B)$ mit S.2. aus 7. und 10.

C ist herleitbar; es gilt $IB(C) = 0$.

d) Angenommen, C hat die Gestalt $\neg A$.

α) A ist herleitbar.

1. $\neg A \rightarrow \neg A$ ist herleitbar (14.5.1)
2. $A \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$ Ax. 1a.
3. A nach I.V.
4. $\neg A \rightarrow A$ mit S.2. aus 2. und 3.
5. $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg \neg A)$ Ax. 7.
6. $(\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg \neg A$ mit S.2. aus 4. und 5.
7. $\neg \neg A$ mit S.2. aus 1. und 6.

C ist herleitbar; es gilt $IB(C) = 0$.

β) $\neg A$ ist herleitbar. $IB(\neg A) = IB(C) = 1$.

Lemma 2: Gilt für jede Belegung IB der Aussagenvariablen

$U_1, \dots, U_n$ der Formel C, daß aus

den jeweiligen $A_1, \dots, A_n$ C herleitbar ist,

so gilt:

$$U_1 \vee \neg U_1 \rightarrow (\dots (U_n \vee \neg U_n \rightarrow C) \dots)$$

Beweis:

Verringerung der Prämissen $U_1, \neg U_1$ durch Anwendung des

Deduktionstheorems und dann Einführung der Adjunktion durch Ax. 6., bis alle Prämissen beseitigt sind.

Damit läßt sich nun der Vollständigkeitssatz beweisen. Aus der Allgemeingültigkeit der Formel C folgt, daß C bei keiner Belegung den Wert 0 erhält, und damit, daß $A_1, \dots, A_n \vdash C$ für jede Belegung $\mathcal{B}$ gilt. Mit Lemma 2 folgt daraus:

$$U_1 \vee \neg U_1 \rightarrow (\dots (U_n \vee \neg U_n \rightarrow C) \dots)$$

Da $A \vee \neg A$ eine herleitbare Formel ist (15.2.2) erhält man daraus die gesuchte Formel C .

§ 16. Prädikatenlogik

16.1 Schlüsse der bekannten Art

Alle Menschen sind sterblich
 Sokrates ist ein Mensch

Sokrates ist sterblich

sind mit aussagenlogischen Mitteln allein nicht durchführbar. Um solcherart schließen zu können, müssen wir auf die Zusammensetzung der Aussagen eingehen. Neben den aussagenlogischen Beziehungen betrachten wir daher in der Prädikatenlogik All- und Existenzaussagen und Prädikatsbeziehungen.

Wir schreiben

$\wedge x A(x)$ anstatt "für alle x gilt $A(x)$ "

$\vee x A(x)$ anstatt "es gibt ein x , für das $A(x)$ gilt"

Dabei ist " x " Mitteilungszeichen für eine Objekt- beziehungsweise Subjektvariable; $A(x)$ ist eine Aussage, in der x als Objekt- beziehungsweise Subjektvariable auf-

tritt. $\wedge$ heißt "Allquantor", $\vee$ "Existenzquantor".

16.2 Eine Objekt- beziehungsweise Subjektvariable heißt gebunden, wenn sie im Geltungsbereich eines der beiden Quantoren auftritt, sie heißt frei andernfalls.

16.3 Grammatikalisches Subjekt und Objekt einer Aussage sollen bezüglich ihrer Bedeutung in der Prädikatsbeziehung nicht unterschieden werden. Sie werden als gleichwertige "Gegenstände" (Objekte) durch das Prädikat verbunden. Wir wollen daher nur noch von Objektvariablen sprechen.

16.4 Die Anzahl der Objekte, die durch ein Prädikat verbunden werden, heißt die Stellenzahl des Prädikats.

Beispiele:

- 1-stellig: Zwei ist eine Primzahl $p(2)$
- 2-stellig: Der Durchmesser halbiert den Kreis $h(d,k)$
- 3-stellig: Die Gerade a verbindet die Punkte b und c $v(a,b,c)$
- 4-stellig: S sticht N mit einem Messer in den Arm s(S,N,M,A)

Die Buchstaben "p", "h", "v", "s" sind dabei Mitteilungszeichen für Prädikatszeichen (oder -konstanten); "2", "d", "k", "a", "b", "c", "S", "N", "M", "A" Mitteilungsszeichen für bestimmte Objekte.

16.5 In der Prädikatenlogik haben wir folgende Grundzeichen zur Verfügung:

- 1. Freie und gebundene Objektvariablen
- 2. Funktionszeichen mit zugehöriger Stellenzahl $n \geq 1$
- 3. Aussagenvariablen
- 4. Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
- 5. Prädikatszeichen mit zugehöriger Stellenzahl $n \geq 1$
- 6. Quantoren $\wedge, \vee$
- 7. Runde Klammern, Komma

16.6 Induktive Definition der Terme:

1. Jede freie Objektvariable ist ein Term
2. Ist f^n ein n -stelliges Funktionszeichen und sind $t_1, \dots, t_n$ Terme, so ist $f^n(t_1, \dots, t_n)$ ein Term.

16.7 Definition der Nennform:

Eine n -stellige Nennform ist eine nichtleere Zeichenreihe, die außer Grundzeichen höchstens die Nennzeichen $*_1, \dots, *_n$ enthält.

Bezeichnet $\mathcal{F}$ eine n -stellige Nennform und bezeichnen $u_1, \dots, u_n$ endliche nichtleere Zeichenreihen, so soll $\mathcal{F}(u_1, \dots, u_n)$ diejenige Zeichenreihe bezeichnen, die sich aus $\mathcal{F}$ ergibt, wenn die Nennzeichen $*_1, \dots, *_n$ überall, wo sie in $\mathcal{F}$ auftreten, durch $u_1, \dots, u_n$ ersetzt werden.

16.8 Mitteilungszeichen:

$v, v_1, v_2, \dots$	für freie Objektvariablen
$x, y, z, x_1, \dots$	für gebundene Objektvariablen
$f^n, g^n, h^n, f_1^n, \dots$	für n -stellige Funktionszeichen
$U, V, W, U_1, \dots$	für Aussagenvariablen
p^n, q^n	für n -stellige Prädikatszeichen
r, s, t	für Terme
große deutsche Buchstaben	für Nennformen $\mathcal{F}, \mathcal{G}$
$A, B, C, A_1, \dots$	für Formeln

16.9 Induktive Definition der Formeln:

1. Jede Aussagenvariable ist eine Formel.
2. Ist p^n ein n -stelliges Prädikatszeichen und sind $t_1, \dots, t_n$ Terme, so ist $p^n(t_1, \dots, t_n)$ eine Formel
3. Ist A eine Formel, so ist auch $\neg A$ eine Formel.
4. Sind A und B Formel, so sind auch $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ und $(A \rightarrow B)$ Formeln.
5. Ist v eine freie Objektvariable, $\mathcal{F}(v)$ eine Formel und x eine gebundene Objektvariable, die nicht

in $\mathcal{F}$ auftritt, dann sind auch $\wedge x \mathcal{F}(x)$ und $\vee x \mathcal{F}(x)$ Formeln.

§ 17. Semantik der Prädikatenlogik

17.1 Die Wahrheit einer prädikatenlogischen Formel hängt von der Interpretation der Objekt-, Prädikat- und Funktionszeichen ab. Eine Belegung zur Ermittlung des Wahrheitswertes einer prädikatenlogischen Formel ist daher neben einer Zuordnung von Wahrheitswerten zu den Aussagenvariablen eine Zuordnung von bestimmten Objekten, Prädikaten und Funktionen zu den entsprechenden Zeichen aus einer vereinbarten Menge, dem Individuenbereich.

17.2 Definition einer Belegung ϕ :

Mit einer nichtleeren Menge I sei ein Individuenbereich gegeben. I^n sei die Menge der n -tupel $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ mit α_i aus I ($i = 1, \dots, n$). Eine n -stellige Funktion auf I ordnet dann jedem solchen n -tupel genau ein Objekt aus dem Individuenbereich I zu.

Eine Belegung ϕ über einem Individuenbereich I ist eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

1. Für jede freie Objektvariable v sei $\phi(v)$ ein Element aus dem Individuenbereich.
2. Für jedes n -stellige Funktionszeichen f^n sei $\phi(f^n)$ eine n -stellige Funktion auf I .
3. Für jede Aussagenvariable U sei $\phi(U)$ aus der Menge der Wahrheitswerte.
4. Für jedes n -stellige Prädikatszeichen p^n sei $\phi(p^n)$ eine Teilmenge von I^n .

Terme und Formeln bleiben unverändert, wenn gewisse freie Objektvariablen darin durch Namen von Elementen von I ersetzt werden.

17.3 Induktive Definition von $\phi(t)$ mit Elementen aus I für jeden Term (auch mit Namen von Elementen von I):

1. Für jede freie Objektvariable a ist $\phi(a)$ aus I gegeben.
2. Für jeden Namen α eines Elementes aus I sei $\phi(\alpha) := \alpha$.
3. $\phi(f^n(t_1, \dots, t_n)) = (\phi(f^n))(\phi(t_1), \dots, \phi(t_n))$

17.4 Induktive Definition von $\phi(C)$ aus $\{0, 1\}$ für jede Formel C (auch mit Namen von Elementen von I):

1. $\phi(U) \in \{0, 1\}$ ist gegeben
2. $\phi(p^n(t_1, \dots, t_n)) = 1$, wenn $(\phi(t_1), \dots, \phi(t_n)) \in \phi(p^n)$
 $= 0$ sonst
3. $\phi(\neg A) = 1$, wenn $\phi(A) = 0$
 $= 0$ sonst
4. $\phi(A \wedge B) = 1$, wenn $\phi(A) = 1$ und $\phi(B) = 1$
 $= 0$ sonst
5. $\phi(A \vee B) = 1$, wenn $\phi(A) = 1$ oder $\phi(B) = 1$
 $= 0$ sonst
6. $\phi(A \rightarrow B) = 0$, wenn $\phi(A) = 1$ und $\phi(B) = 0$
 $= 1$ sonst
7. $\phi(\wedge x \mathcal{F}(x)) = 1$, wenn $\phi(\mathcal{F}(\alpha)) = 1$ für alle $\alpha \in I$
 $= 0$ sonst
8. $\phi(\vee x \mathcal{F}(x)) = 1$, wenn $\phi(\mathcal{F}(\alpha)) = 1$ für mindestens
 $= 0$ sonst ein $\alpha \in I$

17.5 Definition der Gültigkeit:

Eine Formel A heie gültig in I , wenn $\phi(A) = 1$ für jede Belegung ϕ , erfüllbar in I , wenn $\phi(A) = 1$ für mindestens eine Belegung ϕ .

Eine Formel A heie allgemeingültig, wenn sie in jedem Individuenbereich gültig ist, erfüllbar, wenn sie in mindestens einem Individuenbereich gültig ist.

Eine Formel A ist genau dann allgemeingültig, wenn ihre Negation $\neg A$ nicht erfüllbar ist.

Eine Formel A ist genau dann erfüllbar, wenn $\neg A$ nicht allgemeingültig ist.

§ 18. Syntaktik und metatheoretische Sätze zur Prädikatenlogik

18.1 Axiome des prädikatenlogischen Systems:

1. Die Axiome des aussagenlogischen Systems

2. $\bigwedge x \mathcal{F}(x) \rightarrow \mathcal{F}(t)$

3. $\mathcal{F}(t) \rightarrow \bigvee x \mathcal{F}(x)$

18.2 Grundsatzregeln:

1. "modus-ponens" : $A, A \rightarrow B \vdash B$ (S.2.)

2. " $\bigwedge$ -Regel" : $A \rightarrow \mathcal{F}(v) \vdash A \rightarrow \bigwedge x \mathcal{F}(x)$

3. " $\bigvee$ -Regel" : $\mathcal{F}(v) \rightarrow B \vdash \bigvee x \mathcal{F}(x) \rightarrow B$

Dabei darf bei der $\bigwedge$ - und $\bigvee$ -Regel die freie Variable v nicht in der Konklusion auftreten (Variablenbedingung).

Die Herleitbarkeit ist wie üblich definiert (14.4).

18.3 Es gilt der Konsistenzsatz: Jede herleitbare Formel ist allgemeingültig.

Beweis: (durch Herleitungsinduktion)

a) Die Axiome sind allgemeingültig.

1. Die Axiome des aussagenlogischen Systems sind allgemeingültig.

2. Jede Formel $\bigwedge x \mathcal{F}(x) \rightarrow \mathcal{F}(v)$ ist allgemeingültig.
Sei ϕ eine Belegung mit $\phi(\mathcal{F}(v)) = 0$. Daraus folgt $\phi(\bigwedge x \mathcal{F}(x)) = 0$. Damit ist der einzige Fall, für den $\phi(\bigwedge x \mathcal{F}(x) \rightarrow \mathcal{F}(v))$ falsch werden kann ausgeschlossen.

3. Jede Formel $\mathcal{F}(v) \rightarrow \bigvee x \mathcal{F}(x)$ ist allgemeingültig.
Sei ϕ eine Belegung mit $\phi(\bigvee x \mathcal{F}(x)) = 0$, dann gilt $\phi(\mathcal{F}(v)) = 0$. Damit ist der einzige Fall, für

den $\phi(\mathcal{F}(v) \rightarrow \forall x \mathcal{F}(x))$ falsch werden kann, ausgeschlossen.

4. Sind A und $A \rightarrow B$ allgemeingültig, so ist auch B allgemeingültig. Zum Beweis siehe 15.3.2 .
5. Ist die Prämisse eines All-Schlusses allgemeingültig, so ist auch die Konklusion allgemeingültig.

Sei $\phi(\wedge x \mathcal{F}(x)) = 0$, dann gibt es $\alpha \in I$ mit $\phi(\mathcal{F}(\alpha)) = 0$.

Sei ϕ^* wie ϕ nur mit $\phi^*(v) = \alpha$.

Dann gilt $\phi^*(\mathcal{F}(v)) = \phi(\mathcal{F}(\alpha)) = 0$.

Daraus folgt $\phi(A) = 0$ und damit $\phi(A \rightarrow \wedge x \mathcal{F}(x)) = 1$

6. Ist die Prämisse $\mathcal{F}(v) \rightarrow B$ eines Existenz-Schlusses allgemeingültig, so ist auch die Konklusion $\exists x \mathcal{F}(x) \rightarrow B$ allgemeingültig.

Sei $\phi(\exists x \mathcal{F}(x)) = 1$, dann gibt es $\alpha \in I$ mit $\phi(\mathcal{F}(\alpha)) = 1$.

Sei ϕ^* wie ϕ nur mit $\phi^*(v) = \alpha$.

$\phi^*(\mathcal{F}(v)) = \phi(\mathcal{F}(\alpha)) = 1$.

Daraus folgt $\phi(B) = 1$ und damit $\phi(\mathcal{F}(v) \rightarrow B) = 1$.

Für den vorliegenden Prädikatenkalkül gilt der Vollständigkeitssatz (vgl. Schütte (2) System PL2). Auf den Beweis gehen wir hier nicht ein.

§ 19. Grundbegriffe der axiomatischen Mengenlehre

Die axiomatische Mengenlehre wird in der Sprache der Prädikatenlogik des Paragraphen 18 formuliert. Dazu erweitern wir das System entsprechend:

19.1 Zusätzliche Grundzeichen:

1. Die Prädikatszeichen $\in$ (Elementschaftsrelation)

und = (Gleichheitsrelation)

2. Geschweifte Klammern $\{, \}$

19.2 Induktive Definition der Terme:

1. Jede freie Objektvariable ist ein Term.
2. Ist v eine freie Variable, $\mathcal{F}(v)$ eine Formel und x eine gebundene Objektvariable, die nicht in $\mathcal{F}$ auftritt, so ist $\{x : \mathcal{F}(x)\}$ ein Term.

19.3 Erweiterung des Formelbegriffs 16.9 :

Sind r und s Terme, dann sind $(r = s)$ und $(r \in s)$ Formeln.

Abkürzungen:

Wir wollen $r \neq s$ für $\neg(r = s)$ schreiben und $r \notin s$ für $\neg(r \in s)$.

Wir wollen $\mathcal{M}$ für die Zeichenreihe $\forall y (* \in y)$ schreiben. Die Formel $\mathcal{M}(v)$ hat dann die Bedeutung, v ist eine Menge.

19.4 Gleichheitsaxiome:

1. Die Formel $r = r$ ist für jeden Term r ein Axiom.
2. Die Formel $r = s \rightarrow (\mathcal{F}(r) \rightarrow \mathcal{F}(s))$ ist ein Axiom für beliebige Terme r, s .

19.5 Zwei mengentheoretische Axiome:

1. Extensionalitätsaxiom

$$\bigwedge x (x \in r \leftrightarrow x \in s) \rightarrow r = s$$

2. Komprehensionsaxiom

$$r \in \{x : \mathcal{F}(x)\} \leftrightarrow \mathcal{F}(r) \wedge \mathcal{M}(r)$$

Am Komprehensionsaxiom läßt sich erkennen, wodurch die Möglichkeit der Antinomienbildung ausgeschlossen werden soll: Das allgemeine Prinzip zur Mengenbildung (Komprehensionsprinzip) der naiven Mengenlehre wurde eingeschränkt.

- 19.6 Die Russellsche Klasse R ist im Sinne der axiomatischen Mengenlehre keine Menge mehr:
Es gilt nach dem Komprehensionsaxiom:

$$\begin{aligned} R \in R &\rightarrow R \notin R \wedge \mathcal{M}(R) && \text{und} \\ R \notin R \wedge \mathcal{M}(R) &\rightarrow R \in R \end{aligned}$$

Beide Formeln lassen sich aus dem Komprehensionsaxiom gewinnen und müssen daher den Wert 1 erhalten.
Der Wert 1 für die Formel $R \in R$ ist ausgeschlossen, da sonst die erste der beiden obigen Formeln falsch wird. Damit muß die Formel $R \notin R \wedge \mathcal{M}(R)$ den Wert 0 erhalten, das bedeutet, daß $\mathcal{M}(R)$ den Wert 0 erhält.

Das Komprehensionsaxiom ist also nur dann wahr, wenn R keine Menge ist.

- 19.7 Die Widerspruchsfreiheit des angegebenen Systems läßt sich durch Angabe eines einfachen Modells und den Nachweis der Widerspruchsfreiheit des Modells wie folgt zeigen:

Jede Formel der Gestalt $r = s$ und $\bigwedge x \mathcal{F}(x)$ habe den Wert 1, und jede Formel der Gestalt $r \in s$ und $\bigvee x \mathcal{F}(x)$ den Wert 0. Nun gilt für die Axiome:

$\bigwedge x (x \in r \rightarrow x \in s \wedge x \in s \rightarrow x \in r) \rightarrow r = s$ ist genau dann falsch, wenn $r = s$ den Wert 0 und $\bigwedge x (x \in r \rightarrow x \in s \wedge x \in s \rightarrow x \in r)$ den Wert 1 hat. Dies ist jedoch nie der Fall.

$$(r \in \{x : \mathcal{F}(x)\} \rightarrow \mathcal{F}(r) \wedge \bigvee x (x \in y)) \wedge (\mathcal{F}(r) \wedge \bigvee x (x \in y) \rightarrow r \in \{x : \mathcal{F}(x)\})$$

Beide Seiten der durch Konjunktion verbundenen Implikationen erhalten bei der gegebenen Belegung den Wert 0, damit ist jede der Implikationen und auch die ganze Konjunktion wahr.

- 19.8 Zum weiteren Aufbau der axiomatischen Mengenlehre:

1. Die Ordinalzahlen werden axiomatisch als Elemente

derjenigen Klasse eingeführt, die durch die Eigenschaften der Transitivität (3.1), der Konnexität (3.2) und der Fundiertheit (3.3.2) beschrieben ist. Außerdem wird verlangt, daß Ordinalzahlen Mengen im echten Sinn sein sollen.

2. Die Kardinalzahlen werden axiomatisch als kleinste Ordinalzahlen einer jeweils durch Gleichmächtigkeit beschriebenen Ordinalzahlmenge eingeführt.

3. Abschnitt: Kritik am Kantischen Unternehmen einer Trans- zendentalphilosophie

Der Kantische Ansatz, daß sich unsere Erkenntnis nicht nach den Gegenständen richten könne, sondern umgekehrt die Gegenstände nach der Erkenntnis richten müssen, ist grundsätzlich überzeugend, wenn man der Metaphysik überhaupt eine Daseinsberechtigung zugestehen will. Tatsächlich sind Urteile a priori von vornherein ausgeschlossen, wenn man annimmt, daß sich Erkenntnis nur nach den empirischen Gegenständen richten könne.

Wir wollen diese "Umänderung der Denkart" (Kant (1) S.19) akzeptieren, ohne jedoch für sie ~~jede~~ die Forderung zu übernehmen, daß sie die "Wirklichkeit" richtig widergebe. Unter dieser Voraussetzung wollen wir unter zwei Gesichtspunkten am Kantischen Versuch und vor allem an der Ausführung Kritik üben.

Zunächst ist Kant von den Wissenschaften, die er von seiner Stellung aus interpretiert hat, von der Mathematik und der Physik und deren Ergebnissen widerlegt worden. Dadurch zeigt sich, wie gründlich Kant alten philosophischen Vorurteilen unterlegen ist und wie stark sich bei ihm ein metaphysisches Denken (im negativen Sinn) halten konnte. Eine solche Kritik ist einfach vom heutigen Wissen aus; sie kann auch nichts am Verdienst Kants schmälern.

Dann gibt es noch die Kritik Hegels an der Kantischen Bewertung und Ausführung der Dialektik. Von diesem Punkt ist es möglich zu einer neuen Haltung gegenüber den Antinomien hinüberzuführen. Wir beschäftigen uns damit im dritten Kapitel ausführlicher.

Dieser zweite Punkt, die Kritik an der Einschätzung der Dialektik und grundsätzlich an der Bewertung des Widerspruchs ließe sich auch unter eine Kritik an den metaphysischen Vorurteilen Kants einreihen, denn Kant übernimmt in völlig unreflektierter Weise den Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch

und den Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Gerade an diesem Punkt aber ist vielleicht eine Möglichkeit gegeben, die Schwierigkeiten der Metaphysik, durch eine grundsätzliche Unterscheidung des metaphysischen Bereiches vom Bereich des Empirischen zu bewältigen.

§ 20. Bemerkungen zu einigen Fehldeutungen Kants im Rahmen seiner Transzendentalphilosophie

20.1 Zur allgemeinen Einteilung der Urteile in analytische und synthetische und zur Klassifizierung der Mathematik als einer synthetischen Wissenschaft.

20.1.1 Zunächst ist die Unterscheidung aller Urteile in analytische und synthetische sehr schlecht durchführbar. Wir wollen darauf nicht weiter eingehen, sondern verweisen auf die diesbezüglichen Bemerkungen von Stegmüller (1) im Abschnitt "Der Begriff der Metaphysik" und auf die darin angegebenen Ausführungen von v.O. Quine und Morton G. White.

20.1.2 Kants Unterscheidungsversuch errang aber insofern Bedeutung, als der eigentliche Anstoß zur Grundlagenkrise der Mathematik um die letzte Jahrhundertwende durch das Auftauchen von Antinomien mittelbar durch die Behauptung Kants ausgelöst wurde, daß die Mathematik eine synthetische Wissenschaft a priori sei. Frege fand hierin unter anderen eine Anregung, die Arithmetik und ihre Gesetze im Rahmen einer logischen Deduktion darzustellen. Er benötigte dazu eine Erweiterung des klassisch-logischen Apparates, welche es dann auch erstmalig möglich machte, Antinomien in einer mathematischen Theorie zu formulieren.

20.1.3 In den "Grundlagen der Arithmetik" schrieb Frege die Sätze der Arithmetik seien analytisch deduzierbar und beweisbar. In den "Grundgesetzen der Arithmetik" trat

er dazu den Beweis an und begründete damit die mathematische Richtung des Logizismus, deren Vertreter auf dem rein logischen Charakter der Arithmetik bestehen.

20.1.4 Auch von der Geometrie erhielt Kant eine eindeutige Absage an seine Theorie, daß die reinen Anschauungsformen Raum und Zeit die Grundlagen der Mathematik seien. Seit Hilbert ist die Geometrie nicht mehr die Wissenschaft, die den "Raum" zum Gegenstand hat. Geometrie als axiomatische Wissenschaft legt ihren Gegenstand genausowenig fest wie die Mengenlehre. Gegenstand der Geometrie oder der Mengenlehre ist, was den Axiomen genügt.

20.1.5 Damit ist die Frage Kants, "wie ist reine Mathematik möglich?" für die Ausgangsstellung der Kritik bedeutungslos geworden, da sie ihren ehemals offensichtlichen Zusammenhang zu den synthetischen Urteilen a priori der Metaphysik verloren hat.

20.1.6 Im übrigen meldete schon Hegel Bedenken hinsichtlich Kants Klassifizierung der Mathematik an (vgl. Hegel (3) S.250 und S.256).

"Die Arithmetik ist analytische Wissenschaft, weil alle Verknüpfungen und Unterschiede, die an ihrem Gegenstande vorkommen, nicht in ihm selbst liegen, sondern ihm völlig äußerlich angethan sind." (Hegel (3) S.256)

Damit ist Freges Behauptung formuliert, nur mangelt ihr, wie es in der Philosophie so allgemein üblich ist, das was eine Behauptung wertvoll macht: der Beweis.

20.2 Zur Auffassung des "Unendlichen" bei Kant

20.2.1 Kant gebraucht den Begriff des "Unendlichen", jedoch ohne Zugrundelegung einer Begrifflichkeit, die das im "Unendlichen" Bezeichnete auch fassen könnte.

"Unendlich" ist bei Kant gemeinhin das, was "grenzenlos", "schränkenlos", eben "ohne Ende" und daher auch keiner Wissenschaft zugänglich ist. Der Begriff des "Unendlichen" wird in rein negativ-abgrenzender Weise gebraucht; aber auch indem Kant dem "Unendlichen" wesentlich Eigenschaften abspricht, gerät er in metaphysische Behauptungen.

20.2.2 Daraus entstehen zwangsläufig - implizit oder explizit - Behauptungen, die sich bis heute als geradezu fehlerhaft herausgestellt haben.

Ein Beispiel für Kants Fehleinschätzung der Problematik des Unendlichen ist der Beweis der Theses der ersten Antinomie (vgl. 6.1.1). Eine unendliche Folge der Zustände der Dinge läuft in jeder Minute ab, in jeder Sekunde, ja in jedem nennbaren, noch so kleinen Zeitraum; das liegt im "Wesen" des Kontinuums. Die Mächtigkeit der Menge seiner Punkte ist in jedem Abschnitt größer als die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen. Kant aber beweist die Theses der ersten Antinomie, als ob die Reihe der aufeinanderfolgenden Zustände abzählbar unendlich sei. Es spielt für ihn offensichtlich keine Rolle, wie differenziert die "Unendlichkeit" der Menge der vergangenen Zustände sein mag.

20.2.3 Bei Kant (3) S.456 finden sich einige Äußerungen, die sich zu einer Betrachtung des Verständnisses des Begriffs der "unendlichen Größe" von Kant gut eignen: "Unendlich ist eine Größe, über die keine größere (d.i. über die darin enthaltene Menge einer gegebenen Einheit) möglich ist."

Wir stimmen Kant zu, wenn er meint, daß dieser Satz falsch sei, denn aus 2.9 folgt, daß es für jede beliebige Menge eine größere gibt.

Dagegen ist Kants Begründung zu dieser Ablehnung offensichtlich ungenau, beziehungsweise entbehrt einer eindeutigen Begrifflichkeit:

"Nun ist keine Menge die größte, weil noch immer eine oder mehrere Einheiten hinzugetan werden können." Durch Hinzufügen einer oder mehrerer "Einheiten" - das sind Elemente - zu einer unendlich großen Menge läßt sich so schnell keine Menge größerer Mächtigkeit (Größe) bilden.

"Also ist eine unendliche gegebene Größe, mithin auch eine unendliche Welt unmöglich: sie ist also beiderseitig begrenzt."

Wir stimmen wiederum mit Kant überein, wenn er diese Schlußfolgerung ablehnt. Dies geschieht jedoch nicht, weil das "Unendliche" keine Größe (Menge) wäre, wie Kant meint, sondern weil eine Verwechslung von "größter Menge" und "unendlicher Menge" vorliegt; eine Verwechslung, der Kant selbst auch unterliegt, wenn er über die unendliche Größe urteilt.

"Der wahre (transzendente) Begriff der Unendlichkeit ist: daß die sukzessive Synthesis der Einheit in Durchmessung eines Quantums niemals vollendet sein kann. Hieraus folgt ganz sicher, daß eine Ewigkeit wirklicher aufeinanderfolgender Zustände bis zu einem gegebenen Zeitpunkte nicht verflossen sein kann, die Welt also keinen Anfang haben müsse."

Daraus ist ersichtlich, daß Kant das "Unendliche" nur als potentiell Unendliches gelten läßt. Diese Auffassung wird auch heute noch von Mathematikern vertreten.

Auf der anderen Seite sollte man diese Definition der "Unendlichkeit" als geeignetes Mittel zur Widerlegung dessen halten, was Kant selbst daraus folgert: daß die Welt einen Anfang haben müsse. Wenn bis zu jedem Zeitpunkt eine unendliche Menge von Zeitabschnitten vorhergegangen ist, so ist einleuchtend, daß eine Abzählung der Zeitabschnitte unendlich weit in die Vergangenheit führen muß, da in der Gegenwart schon eine Grenze besteht. Dies bedeutet aber nichts anderes, als daß die Welt keinen Anfang haben könne. (vgl. 6.1.1)

20.3 Zur Stellung der Antinomien bei Kant

20.3.1 Die Antinomien bei Kant sollen den Eindruck der Vollständigkeit erwecken (vgl. 19). Daß sie es tatsächlich nicht sind ist klar.

20.3.2 Dafür, daß Kant den logischen Charakter der Stellung der Antinomien in einem theoretischen System nicht erkannt hat, spricht, daß er die Antinomien völlig auf die Metaphysik beschränkt sieht.

So konnte es geschehen, daß die Kantischen Antinomien niemals diese Bedeutung gewannen wie die mathematischen Antinomien um 1900. Die Entdeckung der mathematischen Antinomien ließ grundsätzlich um die Möglichkeit exakter Wissenschaft fürchten; die Kantischen Antinomien dagegen waren auf den Bereich der Metaphysik fixiert, deren wissenschaftliche Geringschätzung durch die Widersprüche nur gerechtfertigt wurde.

§ 21. Zur Hegelschen Kritik an Kant

21.1 Die Kritik an den Antinomien Kants und deren Auflösung

1 "Zunächst bemerke ich, daß Kant seinen vier kosmologischen Antinomien durch das Eintheilungsprincip, das er von seinem Schema der Kategorien hernahm, einen Schein von Vollständigkeit geben wollte. Allein die tiefere Einsicht in die antinomische oder wahrhafter in die dialektische Natur der Vernunft zeigt überhaupt jeden Begriff als Einheit entgegengesetzter Momente auf, denen man also die Form antinomischer Behauptungen geben könnte." (Hegel (3) S.227)

- 2 "Ferner hat Kant die Antinomie nicht in den Begriffen selbst, sondern in der schon konkreten Form kosmologischer Bestimmungen aufgefaßt. Um die Antinomie rein zu haben und sie in ihrem einfachen Begriffen zu behandeln, mußten die Denkbestimmungen nicht in ihrer Anwendung und Vermischung mit den Vorstellung der Welt, des Raums, der Zeit, der Materie u.s.f. genommen, sondern ohne diesen konkreten Stoff, der keine Kraft noch Gewalt dabei hat, rein für sich betrachtet werden, indem sie allein das Wesen und den Grund der Antinomien ausmachen."
(Hegel (3) S.227)
- 3 "Die kantischen Antinomien näher betrachtet, enthalten nichts Anders, als die ganz einfache kategorische Behauptung eines jeden der zwei entgegengesetzten Momente einer Bestimmung, für sich isolirt von der andern. Aber dabei ist diese einfache kategorische oder eigentlich assertorische Behauptung in ein schiefes, verdrehtes Gerüste von Raisonement eingehüllt, wodurch ein Schein von Beweisen hervor gebracht, und das bloß Assertorische der Behauptung versteckt und unkenntlich gemacht werden soll; wie sich dies bei der nähern Betrachtung derselben zeigen wird."
(Hegel (3) S.228)
- 4 "Die kantische Auflösung der Antinomie besteht ... allein darin, daß die Vernunft die sinnliche Wahrnehmung nicht überfliegen, und die Erscheinung, wie sie ist, nehmen solle. Diese Auflösung läßt den Inhalt der Antinomie selbst auf der Seite liegen, sie erreicht die Natur des Begriffes ihrer Bestimmungen nicht, deren jede, für sich isolirt, nichtig und an ihr selbst nur das Uebergehen in ihre Andere ist, und die Quantität als ihre Einheit und darin ihre Wahrheit hat."
(Hegel (3) S.238)
- 5 Die Punkte 20.1.1 bis einschließlich 20.1.4 geben die für uns wesentlichen Abschnitte der Hegelschen Kritik

an den Kantischen Antinomien wörtlich wieder. Gleichzeitig als Übergang zum nächsten Kapitel stellen wir folgende Punkte heraus:

- 5.1 Antinomien sind nicht auf bestimmte Begriffe beschränkt; sie sind ein allgemein logisches Phänomen. Wir werden daher im nächsten Kapitel ganz formal dazu übergehen, den Status der Antinomien durch eigene Bewertung in einem logischen System zu verankern.
- 5.2 Antinomien sind nicht an den bestimmten Inhalt von Begriffen gebunden. Der Gedanke dieser Arbeit ist, zu versuchen, die Ergebnisse der transzendentalen Untersuchungsmethode Kants, die reinen Anschauungsformen und die reinen Verstandesbegriffe, nicht durch eine bestimmte, inhaltlich gebundene Anzahl, sondern allgemein durch Abstraktionsformen oder -dimensionen beliebiger Anzahl und beliebigen Inhaltes zu ersetzen.

21.2 Die Kritik an der Kantischen Bewertung der Dialektik

- 1 "Kant hat die Dialektik höher gestellt, und diese Seite gehört unter die größten seiner Verdienste, - indem er ihr den Schein von Willkür nahm, den sie nach der gewöhnlichen Vorstellung hat, und sie als ein notwendiges Thun der Vernunft darstellte." (Hegel (3) S.54)
- 2 "Ob nun schon, ... , das Aufzeigen der Antinomien insofern als eine sehr wichtige Förderung der philosophischen Erkenntnis zu betrachten ist, als dadurch der starre Dogmatismus der Verstandesmetaphysik beseitigt und auf die dialektische Bewegung des Denkens hingewiesen worden ist, so muß doch dabei zugleich bemerkt werden, daß Kant auch hier bei dem bloß negativen Resultat der Nichterkennbarkeit des Ansich der Dinge stehen geblieben und nicht zur Erkenntnis der wahren und positiven Be-

deutung der Antinomien hindurch gedrungen ist."
(Hegel (4) S.141)

3 An diesen Bemerkungen interessiert uns für das nächste Kapitel die grundsätzliche Wertschätzung des Widerspruchs in der Form der Antinomien für eine dialektische Logik.

21.3 Diese ausgewählten Abschnitte der Kritik Hegels an den grundlegenden Auffassungen mit denen Kant seine Kritik aufbaut, verweisen uns auf die Möglichkeit eines logischen Systems, in dem Widersprüche auftauchen, die nicht dazu führen, daß jede beliebige Aussage bewiesen werden kann.

K a p i t e l I I I

EINE ZWEITE MÖGLICHKEIT, DEN ANTINOMIEN ZU BEGEGNEN: EINSCHRÄNKUNG DER URTEILSSTRUKTUR

Wir haben den Versuch von Kant und den mathematischen Weg unter einer Überschrift betrachtet, da beiden der Wille zugrundeliegt, Antinomien strikt auszuschließen.

Sehen wir hierdurch eine erste Möglichkeit beschrieben, sich den Antinomien gegenüber zu verhalten, so ergibt sich eine zweite Möglichkeit durch einfache Negation dieser ersten Forderung: Antinomien sollen nicht strikt ausgeschlossen werden. Daraus folgt eine Einschränkung der strikten Geltung der Urteilssätze; wir werden jetzt also von der Forderung der unbedingten Zweiwertigkeit der Aussagen abweichen. Es soll Urteilssätze geben, die weder wahr noch falsch sind, sondern einen dritten Wahrheitswert zuerkannt bekommen, in §23 insbesondere den Wert "antinomisch".

In §22 berichten wir über schon bestehende dreiwertige Systeme, in denen zwar die Urteilsstruktur durch einen neuen Wahrheitswert eingeschränkt wurde, aber Antinomien nicht gebildet werden können. In §23 wird ein aussagenlogisches System vorgestellt, in dem Antinomien auftreten dürfen, ohne daß jede beliebige Formel herleitbar ist, das sich in einfacher Weise auf die Prädikatenlogik erweitern läßt und ein uneingeschränktes Komprehensionsaxiom und damit die Bildung von Antinomien erlaubt.

1. Abschnitt: Formale dreiwertige Logik

=====

Von den Antinomien ging auch historisch der erste Versuch

aus, eine formale dreiwertige Logik zu schaffen. Um die Anschaulichkeit der Problematik zu zeigen, wollen wir im folgenden die Bemerkungen von Łukasiewicz (1) hören, die den Hintergrund zur Entstehung seiner dreiwertigen Logik beschreiben:

"Logical coercion is most strongly manifested in a priori sciences. Here the contest was to the strongest. In 1910 I published a book on the principle of contradiction in Aristotle's work, in which I strove to demonstrate that that principle is not so self-evident as it is believed to be. Even then I strove to construct non-Aristotelian logic, but in vain.

Now I believe to have succeeded in this. My path was indicated to me by antinomies, which prove that there is a gap in Aristotle's logic. Filling that gap led me to a transformation of the traditional principles of logic. Examination of that issue was the subject-matter of my last lectures. I have proved that in addition to true and false propositions there are possible propositions, to which objective possibility corresponds as a third in addition to being and non-being.

This gave rise to a system of three-valued logic, which I worked out in detail last summer. That system is as coherent and self-consistent as Aristotle's logic, and is much richer in laws and formulae.

That new logic, by introducing the concept of objective possibility, destroys the former concept of science, based on necessity. Possible phenomena have no causes, although they themselves can be the beginning of a causal sequence. An act of a creative individual can be free and at the same time affect the course of the world."

Zeitliche Logik unterliegt einer Problematik der geschilderten Art (vgl. Hegel (1) S.83). Aussagen über zukünftige Ereignisse können nach Eintreten oder Nichteintreten des bezeichneten Ereignisses als wahr oder falsch beurteilt

werden. Als Voraussage aber, und es wird, auch wenn alle aufgestellten Behauptungen Aussicht auf Entscheidung haben, immer Aussagen über zukünftige Ereignisse geben, hat es keinen Sinn zu sagen, sie sei wahr oder falsch. Von einer Behauptung, die die Zukunft betrifft, können wir nur sagen, daß sie notwendig, unmöglich oder möglich sei. Wir haben damit einen dritten Wahrheitswert benannt.

An dieser Stelle sei auf eine Bemerkung von Gotthard Günther hingewiesen:

"Zwischen Vergangenheit und Zukunft besteht ein logischer Bruch, der dadurch angezeigt wird, daß das 'tertium non datur' zwar in beiden Bereichen gilt, aber nur in einem der beiden Bereiche anwendbar ist. Dieser logische Bruch ist ein irdisches Gleichnis für den metaphysischen Bruch zwischen Diesseits und Jenseits oder zwischen irdischer Zeit und überirdischer Ewigkeit." (Günther (1) S.113)

§ 22. Eine dreiwertige Aussagenlogik von Łukasiewicz

22.1 Semantische Charakterisierung durch Wahrheitstabellen für die Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$:

(2 sei im folgenden das Mitteilungszeichen für "möglich")

die Negation

A	$\neg A$
0	1
1	0
2	2

die Konjunktion

A	B	0	1	2
0	0	0	0	0
1	0	0	1	2
2	0	0	2	2

die Adjunktion

A	B	0	1	2
0	0	0	1	2
1	1	1	1	1
2	2	2	1	2

die Implikation

A	B	0	1	2
0	1	1	1	1
1	0	1	2	2
2	2	2	1	1

die Äquivalenz

$A \leftrightarrow B$	0	1	2
0	1	0	2
1	0	1	2
2	2	2	1

22.2 Aussageform, semantische Äquivalenz und Allgemeingültigkeit sind wie in 13.4, 13.6 und 13.8 definiert.

Wenn A und B Aussageformen sind, dann erhalten wir folgende Aussagen:

1. $A \vee B \models (A \rightarrow B) \rightarrow B$
2. $A \wedge B \models \neg(\neg A \vee \neg B)$

Beide Behauptungen lassen sich leicht durch Belegung prüfen.

3. Der Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch ist nicht allgemeingültig:

$$\neg(A \wedge \neg A)$$

$$2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2$$

4. Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten ist nicht allgemeingültig:

$$A \vee \neg A$$

$$2 \ 2 \ 2 \ 2$$

5. $A \rightarrow B$ läßt sich nicht durch die Junktoren $\neg, \wedge, \vee$ ausdrücken.

Beweis: Es sei IB eine Belegung, für die gilt:

$$IB(A) = 2 \text{ und } IB(B) = 2$$

$$\text{Dann gilt: } IB(A \rightarrow B) = 1$$

$$\text{Andererseits gilt: } IB(\neg A) = 2$$

$$IB(\neg B) = 2$$

$$IB(A \wedge B) = 2$$

$$IB(A \vee B) = 2$$

Daraus ist ersichtlich, daß durch keine Kombination der Junktoren bei der Be-

gung IB der Wahrheitswert 1 erhält-
lich ist.

6. Folgende Formel ist nicht allgemeingültig:

$$A \wedge \neg A \rightarrow C$$

$$2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 0$$

7. Die "reductio ad absurdum" ist nicht allgemeingültig:

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$$

$$2 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2$$

Für eine syntaktische Beschreibung werden Formeln, Axiome und Grundschiußregeln angegeben:

22.3 Induktive Definition der Formeln:

1. Jede Aussagenvariable ist eine Formel.
2. Sind A und B Formeln, so sind $\neg A$ und $(A \rightarrow B)$ Formeln.

22.4 Axiome:

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
3. $((A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow A$
4. $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

Die Allgemeingültigkeit der angegebenen Formeln läßt sich leicht durch Belegung prüfen.

22.5 Einzige Grundschiußregel ist der "modus ponens":

$$A, A \rightarrow B \vdash B$$

22.6 Es gilt der Konsistenzsatz:

Jede herleitbare Formel ist allgemeingültig.

Beweis: a) Die Axiome sind allgemeingültig.

b) A und $A \rightarrow B$ seien allgemeingültig und herleitbar.

Angenommen, es gibt eine Belegung IB, so daß B den Wert 2 erhält, dann gilt entweder $IB(A)=0$ oder $IB(A)=2$, da $A \rightarrow B$ nach Voraussetzung den Wert 1 hat. Beide Bewertungen von A sind aber im Widerspruch zur Voraussetzung, nach der A allgemeingültig ist.

Angenommen, es gibt eine Belegung IB, so daß B den Wert 0 erhält, dann erhält entweder A oder $A \rightarrow B$ den Wert 0. Beides ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, daß A und $A \rightarrow B$ allgemeingültig sind.

Nach Łukasiewicz und Tarski gilt auch der Vollständigkeitsatz (vgl. Sinowjew (1) S.29).

Der "logische Bruch" zwischen Vergangenheit und Zukunft erfährt seine Bewältigung in der zeitlichen Logik durch einen dritten Wahrheitswert. Damit ist uns ein Weg gewiesen, die ähnlichen Schwierigkeiten des "logischen Bruches" in der Metaphysik durch die Mittel einer dreiwertigen Logik zu lösen.

Die dreiwertige Logik von Łukasiewicz ist zu diesem Zweck nicht geeignet. Der Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch ist zwar nicht gültig, da er den Wert 2 für eine Belegung erhält; bei einer prädikatenlogischen Erweiterung, bei der Antinomien auch herleitbar sein sollen, muß aber die Gültigkeit auch auf Formeln mit dem Wert 2 ausgedehnt werden. Damit werden die Formeln 22.2.3, 22.2.4, 22.2.6, 22.2.7 wieder zu gültigen Formeln.

Da wir die Antinomien jedoch nicht beseitigen wollen, bietet uns vielleicht die dreiwertige Logik, die F.G. Asenjo unter dem Titel "A Calculus of Antinomies" vorgestellt hat, einen besseren Ansatz hinsichtlich der Möglichkeit, mit Antinomien weiter zu schließen.

Wir haben erfahren, daß Aussagen nicht nur wahr oder (ausschließend) falsch sein können, sondern in den Fällen der Antinomien auch beides gleichzeitig: wahr und falsch. Wollen wir die Antinomien nicht als "Fehler" oder Grenze einer Theorie betrachten und damit aus der Theorie verbannen, so müssen wir zur Anerkennung des eigenen Status' der antinomischen Begriffe einen eigenen Wahrheitswert für Antinomien akzeptieren.

§23. Ein Vorschlag von F.G. Asenjo

23.1 Beziehen wir also in unser Denken Begriffe wie "Anfang der Welt", das heißt antinomische Begriffe ein, und Metaphysik wollen wir als ein solches Denken verstehen, dann müssen wir offensichtlich neben den Wahrheitswerten "wahr" und "falsch" noch einen dritten Wert einführen, den man als den Wert "antinomisch" bezeichnen kann.

In diesem Sinne nennt F.G. Asenjo (1) seinen Versuch "A Calculus of Antinomies". Die Frage ist zunächst, wie man die Wahrheitstabellen um einen dritten Wahrheitswert sinnvoll erweitern soll, damit aus der zweiwertigen Aussagenlogik aus § 14 ein Schlußsystem gewonnen wird, in dem Antinomien auftreten und trotzdem nicht jede Formel herleitbar ist.

23.2 Die Forderungen an einen dreiwertigen Aussagenkalkül dieser Art werden von Asenjo selbst folgendermaßen beschrieben:

"What we require is a system of axioms for a nontrivially inconsistent propositional calculus. It should not be possible to prove any proposition from A and A, which means that the rule of reduction to the absurd should not be deducible. Of course, the principle of contradiction should not be deducible either."

23.3 Semantische Charakterisierung durch Wahrheitstabellen für die Junktoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$:

(Als Mitteilungszeichen für den Wahrheitswert "antinomisch" verwenden wir die Ziffer 2.)

die Negation

A	$\neg A$
0	1
1	0
2	2

die Konjunktion

A	B	0	1	2
0	0	0	0	0
1	0	0	1	2
2	0	0	2	2

die Adjunktion

A	B	0	1	2
0	0	0	1	2
1	1	1	1	1
2	2	2	1	2

die Implikation

A	B	0	1	2
0	1	1	1	1
1	0	1	2	2
2	2	1	2	2

die Äquivalenz

A	B	0	1	2
0	1	0	2	2
1	0	1	2	2
2	2	2	2	2

13.4 Definition der Allgemeingültigkeit:

Eine Formel A heißt allgemeingültig, wenn sie bei keiner Belegung IB den Wert " falsch " erhält:
 $IB(A) \neq 0$.

23.5 $\neg A \vee B$ und $A \rightarrow B$ sind wie in der zweiwertigen Logik semantisch äquivalent:

Zum Beweis sind nur die Belegungen mit dem Wert 2 für A oder B zu prüfen.

A	$\neg A$	B	$\neg A \vee B$	$A \rightarrow B$
2	2	2	2	2
2	2	1	1	1
2	2	0	2	2
1	0	2	2	2
0	1	2	1	1

Grundzeichen, Mitteilungszeichen und Formeln seien die gleichen wie in §14 .

23.6 Axiome und Grundschiußregel:

- 1a. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- 1b. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$
2. $A, A \rightarrow B \vdash B$
3. $A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$
- 4a. $A \wedge B \rightarrow A$
- 4b. $A \wedge B \rightarrow B$
- 5a. $A \rightarrow A \vee B$
- 5b. $B \rightarrow A \vee B$
6. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$
7. $A \vee \neg A$
8. $\neg \neg A \rightarrow A$

Das Axiomensystem von Kleene (vgl. §14) ist hier nur bezüglich Ax. 7. geändert worden. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$ wurde durch $A \vee \neg A$ ersetzt. Dadurch ~~steht~~ Asenjo sein Ziel, daß die Formel $A \wedge \neg A \rightarrow B$ keine herleitbare Formel mehr ist, ~~erreicht~~. ($A \wedge \neg A \rightarrow B$ erhält man aus $\neg(A \wedge \neg A)$ und $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$. Beide Formeln wurden mit Ax. 7. bewiesen; vgl. 14.5.2, 15.2.1 . Es bleibt zu zeigen, daß $A \wedge \neg A \rightarrow B$ nur mithilfe von Ax. 7. bewiesen werden kann.)

23.7 Ein "Konsistenzsatz", in dem Sinne, daß nicht jede For-

mel herleitbar ist, ergibt sich daraus, daß beispielsweise die Formel $\neg(A \wedge \neg A)$, nach Aussage Asenjos, nicht herleitbar ist. Asenjo verweist in dieser Hinsicht auf Da Costa (siehe References zu Asenjo (1), S.105).

23.8 Das vorliegende Axiomensystem läßt sich auch auf die Prädikatenlogik erweitern, wobei dann Antinomien gebildet werden können:

"Finally, Russell's paradox can be produced by conveniently extending Da Costa's propositional calculus into a predicate calculus with axioms of membership. However, without reduction to the absurd, $T \in T \leftrightarrow \neg(T \in T)$ does not yield $T \in T$ and $\neg(T \in T)$. But if $T \in T \leftrightarrow \neg(T \in T)$ holds, then $T \in T$ has to be true and false, although not provable (the same is true for $\neg(T \in T)$).

Diese letzte Behauptung trifft jedoch nicht zu, wie man sich überzeugen kann:

Herleitung von $T \in T$ und $T \notin T$ aus $T \in T \leftrightarrow \neg(T \in T)$ unter der Benutzung der Axiome 23.6:

1. $(T \in T \rightarrow T \notin T) \wedge (T \notin T \rightarrow T \in T)$ sei herleitbar
2. $(T \in T \rightarrow T \notin T) \wedge (T \notin T \rightarrow T \in T) \rightarrow (T \in T \rightarrow T \notin T)$ Ax. 4a.
3. $T \in T \rightarrow T \notin T$ mit S.2. aus 1. und 2.
4. $(T \in T \rightarrow T \notin T) \wedge (T \notin T \rightarrow T \in T) \rightarrow (T \notin T \rightarrow T \in T)$ Ax. 4b.
5. $T \notin T \rightarrow T \in T$ mit S.2. aus 1. und 4.
6. $(T \in T \rightarrow T \notin T) \rightarrow ((T \in T \rightarrow (T \notin T \rightarrow T \in T \wedge T \notin T))$
 $(T \in T \rightarrow T \in T \wedge T \notin T))$ Ax. 1b.
7. $(T \notin T \rightarrow T \in T) \rightarrow ((T \notin T \rightarrow (T \in T \rightarrow T \notin T \wedge T \in T))$
 $(T \notin T \rightarrow T \notin T \wedge T \in T))$ Ax. 1b.
8. $(T \in T \rightarrow (T \notin T \rightarrow T \in T \wedge T \notin T)) \rightarrow (T \in T \rightarrow T \in T \wedge T \notin T)$
mit S.2. aus 3. und 6.
9. $(T \notin T \rightarrow (T \in T \rightarrow T \notin T \wedge T \in T)) \rightarrow (T \notin T \rightarrow T \notin T \wedge T \in T)$
mit S.2. aus 5. und 7.
10. $(T \in T \rightarrow (T \notin T \rightarrow T \in T \wedge T \notin T))$ Ax. 3.
11. $(T \notin T \rightarrow (T \in T \rightarrow T \notin T \wedge T \in T))$ Ax. 3.

12. $(T \in T \rightarrow T \notin T \wedge T \in T)$ mit S.2. aus 10. und 8. & KOMMUTATIVITÄT VON $\wedge$
13. $(T \notin T \rightarrow T \notin T \wedge T \in T)$ mit S.2. aus 11. und 9.
14. $(T \in T \rightarrow T \notin T \wedge T \in T) \rightarrow ((T \notin T \rightarrow T \notin T \wedge T \in T) \rightarrow (T \in T \vee T \notin T \rightarrow T \notin T \wedge T \in T))$ Ax.6.
15. $(T \notin T \rightarrow T \notin T \wedge T \in T) \rightarrow (T \in T \vee T \notin T \rightarrow T \notin T \wedge T \in T)$ mit S.2. aus 12. und 14.
16. $T \in T \vee T \notin T \rightarrow T \notin T \wedge T \in T$ mit S.2. aus 13. und 15.
17. $T \in T \vee T \notin T$ Ax. 7.
18. $T \notin T \wedge T \in T$ mit S.2. aus 16. und 17.
19. $T \notin T \wedge T \in T \rightarrow T \notin T$ Ax. 4a.
20. $T \notin T \wedge T \in T \rightarrow T \in T$ Ax. 4b.
21. $T \notin T$ mit S.2. aus 18. und 19.
22. $T \in T$ mit S.2. aus 18. und 21.

§ 24. Ein Änderungsvorschlag zu Asenjos "Calculus of Antinomies"

24.1 Das von Asenjo gewählte Axiomensystem ist bei der vorgeschlagenen Semantik nicht vollständig. (vgl. Asenjo (1) S.104) Es ist so gestaltet, daß die beiden Formeln $A \wedge \neg A \rightarrow B$ und $\neg(A \wedge \neg A)$ nicht herleitbar sind, obwohl sie allgemeingültig sind:

$A \wedge \neg A \rightarrow B$	$\neg(A \wedge \neg A)$
2 2 2 2 2 0	2 2 2 2 2
2 2 2 2 2 1	
2 2 2 2 2 2	

Die vorgeschlagene semantische Interpretation scheint deshalb nicht angemessen (auch nicht "annähernd"), weil jede vollständige Axiomatisierung inkonsistent sein muß:

Aus der Allgemeingültigkeit der Formel $A \wedge \neg A \rightarrow B$ folgt dann die Herleitbarkeit dieser Formel und damit, daß jede beliebige Formel B herleitbar ist.

24.2 Durch eine leichte Änderung der Wahrheitstabelle für die Implikation erhält man zumindest eine Interpretation, die die Formel $A \wedge \neg A \rightarrow B$ aus der Menge der allgemeingültigen Formeln ausschließt:

$A \rightarrow B$	0	1	2	$A \wedge \neg A \rightarrow B$
0	1	1	1	2
1	0	1	2	2
2	0	1	2	0

Die Menge der Axiome bleibt unverändert.

14.3 Konsistenzsatz: Jede herleitbare Formel ist allgemeingültig.

Beweis: a) Die Axiome sind allgemeingültig (Prüfung durch Belegung).

b) $A, A \rightarrow B$ seien allgemeingültig und herleitbar.

Angenommen, es gibt eine Belegung, so daß B den Wert 0 erhält; da A nach Voraussetzung immer den Wert 1 oder 2 erhält, erhält dann $A \rightarrow B$ den Wert 0, was aber gegen die Voraussetzung verstößt, daß $A \rightarrow B$ allgemeingültig sein soll.

Die wesentlichen Mängel des Vorschlags von Asenjo, Unvollständigkeit und zu starke Einschränkung des Axiomensystems durch Eliminierung der "reductio ad absurdum", bleiben jedoch weiterhin bestehen.

2. Abschnitt: Formale Logik mit Widersprüchen

Die Ausführungen von Asenjo haben den Nachteil, daß semantische und syntaktische Kennzeichnung der Wahrheit nicht übereinstimmen. Da Asenjós Vorschlag direkt auf der Unvollständigkeit der syntaktischen Interpretation aufbaut, gehen wir von seinem Gedanken ab, und versuchen, auf andere Weise eine semantische Interpretation mit einem Axiomensystem zu gewinnen, für die die Bedingungen der Konsistenz und der Vollständigkeit erfüllt sind.

Hegel hat durch seine Dialektik auf die Möglichkeit einer Logik mit Widersprüchen hingewiesen. Um aus seinen Überlegungen profitieren zu können, versuchen wir in §25 eine Möglichkeit zu schaffen, die einen Übergang von der "philosophischen" Bestimmung einer Logik mit Widersprüchen (d.i. im weiter ausgebildeten Stadium die Dialektik) zu der mathematischen Bestimmung erlaubt.

Zu diesem Zweck gehen wir von dem Begriffspaar "syntaktisch - analytisch" aus und gelangen zu einer Vergleichung der Begriffe "synthetisch" und "semantisch". Damit ist uns dann gestattet, die wesentlichen Angriffspunkte der dialektischen Logik, den Satz vom ausgeschlossenen Dritten und den Satz von ausgeschlossenen Widerspruch, in eine Anweisung zum Aufbau einer Semantik zu verwandeln.

Mit diesen Mitteln gelingt es uns in §26 eine Aussagenlogik anzugeben, die den geforderten Bedingungen entspricht. §27 bringt dann eine Erweiterung des aussagenlogischen Systems auf die Prädikatenlogik mit einer Einführung des uneingeschränkten Komprehensionsaxioms.

§ 25. Syntaktisch - Analytisch

25.1 Kant nennt einen Urteilssatz "analytisch", wenn dessen Prädikat im Subjekt des Satzes enthalten ist. Diese "Definition" ist undeutlich; auf Möglichkeiten der Kritik haben wir schon in §20 hingewiesen. Uns interessiert jetzt aber nicht die Kritik an dieser Definition, oder Kritik an dem, was Kant selbst für analytische und synthetische Wissenschaften hält, sondern was man aus der Umschreibung, daß ein Prädikat in einem Subjekt "enthalten" ist, herausholen kann.

Betrachten wir zur Erläuterung Kants Beispiel eines analytischen Satzes: "Ein Körper ist ausgedehnt"! Mit der Aussage, daß dieser Satz analytisch sei, behauptet Kant, daß aus der Eigenschaft, ein Körper zu sein, die Eigenschaft des Ausgedehntseins gefolgert werden kann. Da dieser Satz, wie jeder analytische Satz, a priori ist, findet kein besonderer Akt der (empirischen) Folgerung statt; die Vorstellung eines Körpers ist je schon von der Vorstellung der Ausdehnung begleitet.

Bezüglich welcher Gesetzmäßigkeit aber folgt die durch das Prädikat beschriebene Eigenschaft aus dem Subjekt? Es liegt für uns nahe, Subjekt und Prädikat eines analytischen Satzes als einzelne Aussagen aufzufassen: "X ist das Subjekt (oder Objekt) A" und "X hat die Eigenschaft B". Der Satz "A ist B" ist nun genau dann analytisch, wenn die Folgerung des zweiten Satzes aus dem ersten eine "Tautologie" ist. Was aber heißt "Tautologie"? Die Folgerung soll sich nach den Gesetzen der Logik, die ja eine analytische Wissenschaft ist, ergeben.

Wenn man auf dem Standpunkt steht, daß es nur eine

Logik gibt, nämlich diejenige, mittels der wir denken, kann man sich die Angabe logischer Gesetze sparen.

Für einen wissenschaftlichen Anspruch seiner Aussagen wird man jedoch ein logisches Axiomensystem angeben. Dann bleibt immer noch die Frage, wie das Subjekt des Satzes gegeben sein soll, damit man dafür, nur mit den Gesetzen einer bestimmten Logik, Aussagen über dessen Eigenschaften erhält. Auch Kant muß den "Körper" irgendwie als Gegebenes haben, um die Eigenschaft der Ausgedehntheit feststellen zu können.

Im Bereich des Logischen können wir allgemein sagen, ein Gegenstand sei uns durch seinen Begriff gegeben. Das soll heißen, der Gegenstand wird durch eine Reihe von Aussagen vollständig beschrieben und von anderen Gegenständen abgehoben. Diese, bezüglich der Herleitung anderer Aussagen, ersten Aussagen nennen wir Axiome. Die Menge der Axiome, die zur Beschreibung eines Gegenstandes nötig sind, nennen wir seinen Begriff. Ein Begriff vereinigt immer eine Menge gleichartiger Gegenstände.

Damit versuchen wir eine Beschreibung des Begriffes "analytisch":

Eine Aussage B heie "analytisch" bezüglich einer Aussage A, wenn aus der Herleitbarkeit von A die Herleitbarkeit von B folgt. Dabei legen wir das System der klassischen Prädikatenlogik (§18) zu Grunde.

Ein Urteilssatz "a ist b" heie "analytisch" bezüglich eines bestimmten logischen Axiomensystems, wenn der Satz "x hat die Eigenschaft b" analytisch bezüglich des Satzes "x ist a" ist.

Damit können wir den Begriff der "analytischen Wissenschaft" so fassen, wie ihn auch Frege verstand, als er zeigen wollte, daß die Mathematik eine analytische Wissenschaft ist. Das in einem analytischen Satz stehende Subjekt wird durch ein, zur Logik hinzugenomme-

nes, Axiomensystem bestimmt. Jedes Prädikat, das sich mit diesem Subjekt zu einem analytischen Satz verbindet, läßt sich mit den Gesetzen der Logik aus der Bestimmung des Subjektes ableiten.

Die Behauptung, eine Wissenschaft sei analytisch, beinhaltet also zwei Teile:

1. Der Gegenstand der Wissenschaft läßt sich axiomatisch fassen.
2. Genau die "Sätze" (Ergebnisse) der Wissenschaft lassen sich durch Anwendung der logischen Gesetze aus der axiomatischen "Definition" des Gegenstandes folgern.

Daraus aber ergeben sich zwei Fragen:

Zu 1.: Wie ist der Gegenstand einer Wissenschaft, außer durch ein Axiomensystem, sonst noch gegeben, daß man beurteilen kann, ob dieser Gegenstand durch ein Axiomensystem tatsächlich "gefaßt" wird.

Zu 2.: Wie ist die Gewißheit der Wahrheit der Sätze einer Wissenschaft, außer durch Ableitung aus Axiomen, sonst noch gegeben, so daß man beurteilen kann, ob genau die (wahren) Sätze der Wissenschaft herleitbar sind.

25.2 Innerhalb eines formallogischen Systems ist die zweite Frage einfach gelöst: In der Semantik wird durch eine Belegung mit Wahrheitswerten die Gültigkeit einer Aussage (Formel) festgestellt.

Da die Logik keinen Gegenstand besitzt, der außerhalb der logischen Axiome festgelegt werden müßte, braucht nur 25.1.2 erfüllt zu sein, damit die Logik eine analytische Wissenschaft genannt werden kann.

Die ganze Erörterung reduziert sich also auf die Frage der Konsistenz und der Vollständigkeit eines logischen Systems, d.h. auf die Übereinstimmung von se-

mantischem und syntaktischem Wahrheitsbegriff.

- 25.3 Die Sätze, die auf Grund einer Bewertungssemantik als wahr gelten, also nicht im Rahmen einer Syntaktik hergeleitet werden, sind klarerweise nicht analytisch; sie sind also synthetisch. (Synthetisch heißt ein Satz, der nicht analytisch ist.)

Durch eine Bewertungssemantik sind potentiell alle synthetischen Sätze gegeben, da die Wahrheit für einen jeden gegebenen Satz durch Belegung entscheidbar ist.

Wir wollen jetzt umgekehrt versuchen, aus der Angabe einiger synthetischer Sätze durch Hegel, die für die dialektische Logik zwingend sind, eine Bewertungssemantik zu konstruieren, zu der auch eine vollständige Axiomatisierung existiert. Dieser Versuch ist eine Fortsetzung der §§22, 23, 24.

- 25.4 Wir beginnen mit den Antinomien und dem Widerspruch, da sie den Kern der Dialektik ausmachen:

1. "Die Antinomie entsteht, weil sowohl das Anders-seyn als das Seyn, der Widerspruch in seiner absoluten Unüberwindlichkeit gesetzt wird." (Hegel (5) S.312)
2. "Die Kantischen Antinomien näher betrachtet, enthalten nichts Anders, als die ganz einfache kategorische Behauptung eines jeden der zwei entgegengesetzten Momente einer Bestimmung, für sich isoliert von der andern." (Hegel (3) S.228)
3. "Dieser Gedanke, daß der Widerspruch, der am Vernünftigen durch die Verstandesbestimmungen gesetzt wird, wesentlich und nothwendig ist, ist für einen der wichtigsten und tiefsten Fortschritte der Philosophie neuerer Zeit zu achten." (Hegel (4) S.140)

Aus diesen drei Zitaten lassen sich für eine Bewertungssemantik folgende Richtlinien entnehmen:

Aus 3.: Es gebe, wie schon im 1. Abschnitt dieses Kapitels, einen dritten Wahrheitswert, der "antinomisch" heißen soll.

Der Widerspruch $A \wedge \neg A$ soll erfüllbar sein, das bedeutet, daß $A \wedge \neg A$ nicht für jede Belegung den Wert 0 erhalten soll. Damit ist auch der Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch $\neg(A \wedge \neg A)$ kein allgemeingültiger Satz mehr.

Wir verwerten dies folgendermaßen:

- a) Eine Aussage soll genau dann den Wert "antinomisch" erhalten, wenn sich aus A die Negation $\neg A$ folgern läßt und umgekehrt. Die Negation erhält dann also auch den Wert "antinomisch".
- Da die Wahrheitswerte für die übliche zweiwertige Belegung erhalten bleiben soll, sieht die Wahrheitstabelle für die Negation folgendermaßen aus:

A	$\neg A$
0	1
1	0
2	2

- b) Die Konjunktion $A \wedge \neg A$ erhält für jede Belegung der zweiwertigen Semantik den Wert 0. Damit sie trotzdem erfüllbar ist, muß sie für den Fall, daß A den Wert 2 erhält wahr sein:

$(A \wedge \neg A)$
2 1 2 2

Damit hat sich der Wert einer Konjunktion, deren beide Glieder antinomisch sind, zwangsläufig ein Wahrheitswert 1 ergeben.

Aus 1. und 2.: Die beiden entgegengesetzten Momente einer Antinomie dürfen nicht isoliert werden; sonst entsteht ein unüberwindbarer Widerspruch der einzelnen Aussagen. Das bedeutet, daß die Konjunktion die beiden Momente des Widerspruchs "bindet" und dadurch den Widerspruch überwindbar macht.

Wir verwerten dies folgendermaßen:

c) Die Antinomie tritt zunächst in der Form

$$(A \rightarrow \neg A) \wedge (A \rightarrow A)$$

auf. Daraus läßt sich dann die Konjunktion $A \wedge A$ herleiten. Damit die einzelnen Momente des Widerspruchs nicht hergeleitet werden können, dürfen die beiden Formeln $A \wedge \neg A \rightarrow A$ und $A \wedge \neg A \rightarrow \neg A$ nicht gelten. Da die Bewertungen der Konjunktion und der Negation für den Wert 2 schon festgelegt sind, ergibt sich zwangsläufig folgende Belegung:

$$\begin{array}{cccccc} A & \wedge & \neg & A & \rightarrow & A \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{cccccc} A & \wedge & \neg & A & \rightarrow & \neg A \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{array}$$

25.5 Zum Satz vom ausgeschlossenen Dritten:

"Er enthält, daß es nicht Etwas gebe, welches weder A noch Nicht-A, daß es nicht ein Drittes gebe, das gegen den Gegensatz gleichgültig sey. In der That aber giebt es in diesem Satze selbst das Dritte, das gleichgültig gegen den Gegensatz ist, nämlich A selbst ist darin vorhanden." (Hegel (3) S.545)

Daraus folgt für die Bewertung der Formel $A \vee \neg A$:

$$\begin{array}{cccc} A & \vee & \neg & A \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}$$

Diese Bewertung ergibt sich wiederum zwangsläufig aus dem Ergebnis für die Bewertung der Negation.

Die damit vorliegenden Bewertungen lassen sich leicht zu vollständigen Wahrheitstabellen erweitern.

§ 26. Aussagenlogik

26.1 Grundzeichen:

1. Aussagenvariablen
2. Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
3. Runde Klammern

26.2 Induktive Definition der Formeln:

1. Jede Aussagenvariable ist eine Formel.
2. Ist A eine Formel, so ist auch $\neg A$ eine Formel.
3. Sind A und B Formeln, so sind auch $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ und $(A \rightarrow B)$ Formeln.

Mitteilungszeichen: $U, V, U_1, \dots$ für Aussagenvariablen
 $A, B, C, A_1, \dots$ für Formeln
 $0, 1, 2$ für die Wahrheitswerte "falsch",
 "wahr" und "antinomisch"

26.3 Semantische Charakterisierung:

die Negation

A	$\neg A$
0	1
1	0
2	2

die Konjunktion

$A \wedge B$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	1

die Adjunktion

$A \vee B$	0	1	2
0	0	1	0
1	1	1	1
2	0	1	0

die Implikation

$A \rightarrow B$	0	1	2
0	1	1	1
1	0	1	0
2	1	1	1

Beispiele allgemeingültiger Formeln der üblichen zweiwertigen Aussagenlogik, die hier nicht mehr allgemeingültig sind:

$$\begin{array}{l} A \wedge \neg A \rightarrow B \quad (\text{"ex falso quodlibet"}) \\ 2 \ 1 \ 2 \ 2 \ 0 \ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A) \quad (\text{"reductio ad absurdum"}) \\ 2 \ 1 \ 2 \ 0 \ 2 \ 1 \ 2 \ 2 \ 0 \ 2 \ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad (\text{"Kontraposition"}) \\ 2 \ 2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 2 \end{array}$$

26.4 Syntaktische Charakterisierung:

- 1a. $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$
- 1b. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- 2. $A, A \rightarrow B \vdash B$
- 3. $A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$
- 4a. $A \vee \neg A \rightarrow (A \wedge B \rightarrow A)$
- 4b. $B \vee \neg B \rightarrow (A \wedge B \rightarrow B)$
- 5a. $A \rightarrow A \vee B$
- 5b. $B \rightarrow A \vee B$
- 6. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$
- 7. $A \vee \neg A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A))$
- 8. $\neg \neg A \rightarrow A$

Durch die Einschränkung der Axiome 4a., 4b., 7. wird, damit der Vollständigkeitssatz bewiesen werden kann, die Einführung einiger weiterer einfacher Axiome notwendig. Diese sind nicht unbedingt unabhängig.

- 9a. $(A \wedge B) \vee \neg (A \wedge B)$
- 9b. $(A \vee B) \vee \neg (A \vee B)$
- 9c. $(A \rightarrow B) \vee \neg (A \rightarrow B)$
- 10a. $A \wedge B \rightarrow B \wedge A$

$$10b. \quad A \wedge (B \wedge C) \rightarrow (A \wedge B) \wedge C$$

$$10c. \quad (A \wedge B) \wedge C \rightarrow A \wedge (B \wedge C)$$

$$11. \quad C \wedge \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$$

26.5 Konsistenzsatz: Jede herleitbare Formel ist allgemeingültig (erhält für jede Belegung den Wert 1).

Beweis:

a) Die Axiome sind allgemeingültig.

$$1a. \quad A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$2 \ 1 \ 1 \ 0 \ 2$$

$$1b. \quad (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$1 \ 0 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0$$

$$1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 2 \ 1 \ 1 \ 0 \ 2$$

$$3. \quad A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$$

$$2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 0 \ 0$$

$$0 \ 1 \ 0 \ 0$$

$$4a. \quad A \vee \neg A \rightarrow (A \wedge B \rightarrow A)$$

$$2 \ 0 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 0 \ 2$$

$$4b. \quad \text{analog!}$$

$$5a. \quad A \rightarrow A \vee B$$

$$0 \ 1 \ 0 \ 0$$

$$2 \ 1 \ 2 \ 0$$

$$5b. \quad \text{analog!}$$

$$6. \quad (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$$

$$1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0$$

$$1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0$$

$$1 \ 1 \ 0 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 2$$

$$1 \ 0 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 2 \ 2$$

$$7. \quad A \vee \neg A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A))$$

$$2 \ 0 \ 2 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 0 \ 2 \ 1 \ 0 \ 2 \ 2$$

$$8. \quad \neg \neg A \rightarrow A$$

$$2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 2$$

9a. - 10c. ist klar!

$$11. \quad C \wedge A \rightarrow (A \rightarrow B) \\ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 2$$

b) Aus der Allgemeingültigkeit der Prämissen folgt mit dem einzigen Grundsatz S.2. die Allgemeingültigkeit der Konklusion:

Angenommen, $IB(B) = 0$; dann gilt: $IB(A \rightarrow B) = 0$, da $IB(A) = 1$ nach Voraussetzung.

Angenommen, $IB(B) = 2$; dann gilt: $IB(A \rightarrow B) = 0$, da $IB(A) = 1$ nach Voraussetzung.

26.6 Deduktionstheorem: Es sei Γ eine Formelmeng e und A eine Formel. Dann gilt: Aus Γ , $A \vdash B$ folgt $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Beweis: (durch Induktion nach der Länge der Herleitung von B aus der Menge, die aus den Axiomen, Γ und A besteht.)

1. Die Länge k der Herleitung sei 1:

a) B ist aus Γ :

1. B nach Vor.
2. $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ Ax. 1a.
3. $A \rightarrow B$ mit S.2. aus 1. und 2.

b) B ist die Formel A:

1. C sei eines der Axiome; herleitbar nach Vor.
2. $C \rightarrow (A \rightarrow C)$ Ax. 1a.
3. $A \rightarrow C$ mit S.2. aus 1. und 2.
4. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B))$ Ax. 1b.
5. $(A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$ mit S.2. aus 3. und 4.
6. $A \rightarrow (C \rightarrow B)$ Ax. 1a. da $B \equiv A$
7. $A \rightarrow B$ mit S.2. aus 5. und 6.

c) B ist ein Axiom:

Analog a)

2. Die Länge k der Herleitung sei $n+1$:

a) - c) wie unter 1.

- d) B ist mit S.2. aus den Prämissen P und $P \rightarrow B$ erschlossen. Für P und $P \rightarrow B$ gilt nach der Induktionsvoraussetzung: $\neg \vdash A \rightarrow P$ und $\neg \vdash A \rightarrow (P \rightarrow B)$. Mit Ax. 1b. und zweimaliger Anwendung von S.2. erhält man daraus $\neg \vdash A \rightarrow B$.

Wie man sieht läuft der Beweis völlig analog 15.1, da keine der eingeschränkten Formeln des Axiomensystems gebraucht wird.

26.7 Vollständigkeitssatz: Jede allgemeingültige Formel ist herleitbar.

Beweis:

$U_1, \dots, U_n$ seien genau diejenigen Aussagenvariablen, die in einer gegebenen Formel C auftauchen. Für eine gegebene Belegung IB seien $A_1, \dots, A_n$ diejenigen Formeln, die sich nach folgender Vorschrift aus den $U_1, \dots, U_n$ darstellen lassen:

$$A_1 := \neg U_1 \quad \text{für } IB(U_1) = 0$$

$$A_1 := U_1 \quad \text{für } IB(U_1) = 1$$

$$A_1 := U_1 \wedge \neg U_1 \quad \text{für } IB(U_1) = 2$$

$$i \in \{1, \dots, n\}$$

Lemma 1:

Es ist für jede Belegung IB aus den A_i entweder C oder $\neg C$ herleitbar ~~ist~~, entsprechend $IB(C) = 1$ und $IB(C) = 0$.

Beweis: (durch Induktion nach der Anzahl j der Junktoren von C)

Bem.: Im Unterschied zum Beweis des Vollständigkeitssatzes der zweiwertigen Logik (15.4), läßt sich das Lemma nur für Formeln C mit mindestens 2 Aussagenvariablenvorkommnissen beweisen, d.h. die

Anzahl der ^{zweistelligen} Junktoren beträgt mindestens 1, (wobei die Negation, als einstelliger Junktor, ausgeschlossen ist.)

$j = 1$:

a) Angenommen, C hat die Gestalt $U_1 \wedge U_2$:

1. $IB(U_1) = 0$ und $IB(U_2) = 0, 1, 2$ d.h. $IB(C) = 0$

1. $\neg U_1$ nach Vor.
2. $\neg U_1 \rightarrow U_1 \vee \neg U_1$ Ax. 5b.
3. $U_1 \vee \neg U_1$ mit S.2. aus 1. und 2.
4. $U_1 \vee \neg U_1 \rightarrow (U_1 \wedge U_2 \rightarrow U_1)$ Ax. 4a.
5. $U_1 \wedge U_2 \rightarrow U_1$ mit S.2. aus 3. und 4.
6. $(U_1 \wedge U_2 \rightarrow U_1) \rightarrow ((U_1 \wedge U_2 \rightarrow \neg U_1) \rightarrow \neg(U_1 \wedge U_2))$ Ax. 7.
7. $((U_1 \wedge U_2 \rightarrow \neg U_1) \rightarrow (U_1 \wedge U_2))$ mit S.2. aus 5., 6.
8. $\neg U_1 \rightarrow (U_1 \wedge U_2 \rightarrow \neg U_1)$ Ax. 1a.
9. $U_1 \wedge U_2 \rightarrow \neg U_1$ mit S.2. aus 8. und 9.
10. $\neg(U_1 \wedge U_2)$ mit S.2. aus 7. und 10.

2. $IB(U_1) = 1, 2$ und $IB(U_2) = 0$ d.h. $IB(C) = 0$

Die Herleitung von $\neg(U_1 \wedge U_2)$ erfolgt analog 1.
Statt 5b. und 4a. mit 5a. und 4b.

3. $IB(U_1) = 1$ und $IB(U_2) = 1$ d.h. $IB(C) = 1$

1. U_1 nach Vor.
 2. U_2 nach Vor.
 3. $U_1 \rightarrow (U_2 \rightarrow U_1 \wedge U_2)$ Ax. 3.
 4. $U_2 \rightarrow U_1 \wedge U_2$ mit S.2. aus 1. und 3.
 5. $U_1 \wedge U_2$ mit S.2. aus 2. und 4.
4. $IB(U_1) = 2$ und $IB(U_2) = 2$ d.h. $IB(C) = 1$
 $IB(U_1) = 1$ und $IB(U_2) = 2$ d.h. $IB(C) = 1$
 $IB(U_1) = 2$ und $IB(U_2) = 1$ d.h. $IB(C) = 1$

In jedem der drei Fälle läßt sich, mithilfe der zusätzlich eingeführten Axiome, in analoger Weise die Formel $U_1 \wedge U_2$ herleiten, und zwar aus der Konjunktion der jeweiligen A_1 und A_2 .

Stellvertretend zeigen wir die Herleitung für den

ersten Fall:

1. $U_1 \wedge \neg U_1$ nach Vor.
2. $U_2 \wedge \neg U_2$ nach Vor.
3. $U_1 \wedge \neg U_1 \rightarrow (U_2 \wedge \neg U_2 \rightarrow (U_1 \wedge \neg U_1) \wedge (U_2 \wedge \neg U_2))$ Ax. 3.
4. $U_2 \wedge \neg U_2 \rightarrow (U_1 \wedge \neg U_1) \wedge (U_2 \wedge \neg U_2)$ mit S.2. aus 1. und 3.
5. $(U_1 \wedge \neg U_1) \wedge (U_2 \wedge \neg U_2)$ mit S.2. aus 2. und 4.
6. $(U_1 \wedge \neg U_1) \wedge (U_2 \wedge \neg U_2) \rightarrow ((U_1 \wedge \neg U_1) \wedge U_2) \wedge \neg U_2$
Ax. 10b.
7. $((U_1 \wedge \neg U_1) \wedge U_2) \wedge \neg U_2$ mit S.2. aus 5., 6.
8. $((U_1 \wedge \neg U_1) \wedge U_2) \vee \neg ((U_1 \wedge \neg U_1) \wedge U_2)$ Ax. 9a.
9. $((U_1 \wedge \neg U_1) \wedge U_2) \vee \neg ((U_1 \wedge \neg U_1) \wedge U_2)$
 $((U_1 \wedge \neg U_1) \wedge U_2) \wedge \neg U_2 \rightarrow (U_1 \wedge \neg U_1) \wedge U_2$ Ax. 4a.
10. $((U_1 \wedge \neg U_1) \wedge U_2) \wedge \neg U_2 \rightarrow (U_1 \wedge \neg U_1) \wedge U_2$ mit S.2. aus 9. und 8.
11. $(U_1 \wedge \neg U_1) \wedge U_2 \rightarrow U_2 \wedge (U_1 \wedge \neg U_1)$ Ax. 10a.
12. $(U_1 \wedge \neg U_1) \wedge U_2$ mit S.2. aus 6. und 10.
13. $U_2 \wedge (U_1 \wedge \neg U_1)$ mit S.2. aus 11. und 12.
14. $U_2 \wedge (U_1 \wedge \neg U_1) \rightarrow (U_2 \wedge U_1) \wedge \neg U_1$ Ax. 10b.
15. $(U_2 \wedge U_1) \wedge \neg U_1$ mit S.2. aus 13. und 14.
16. $(U_2 \wedge U_1) \vee \neg (U_2 \wedge U_1)$ Ax. 9a.
17. $(U_2 \wedge U_1) \vee \neg (U_2 \wedge U_1) \rightarrow ((U_2 \wedge U_1) \wedge \neg U_1 \rightarrow U_2 \wedge U_1)$
Ax. 4a.
18. $(U_2 \wedge U_1) \wedge \neg U_1 \rightarrow U_2 \wedge U_1$ mit S.2. aus 16., 17.
19. $U_2 \wedge U_1$ mit S.2. aus 15. und 18.
20. $U_2 \wedge U_1 \rightarrow U_1 \wedge U_2$ Ax. 10a.
21. $U_1 \wedge U_2$ mit S.2. aus 19. und 20.

b) Angenommen, C hat die Gestalt $U_1 \vee U_2$:

1. $IB(U_1) = 0,2$ und $IB(U_2) = 0,2$ d.h. $IB(C) = 0$

In jedem der vier Fälle lässt sich wie oben die Formel $\neg U_1 \wedge \neg U_2$ aus der Konjunktion der jeweils gegebenen A_1 und A_2 isolieren.

1. $\neg U_1 \wedge \neg U_2$ ist herleitbar
1+1. $\neg U_1 \wedge \neg U_2 \rightarrow (U_1 \vee U_2 \rightarrow \neg U_1 \wedge \neg U_2)$ Ax. 1a.

- 1+2. $U_1 \vee U_2 \rightarrow \neg U_1 \wedge \neg U_2$ mit S.2. aus 1+1. und 1.
 1+3. $\neg \neg U_1$ Annahme
 :
 1+12. $\neg(\neg U_1 \wedge \neg U_2)$ folgt aus 1+3. (vgl.a)1.)
 1+13. $\neg \neg U_1 \vdash \neg(\neg U_1 \wedge \neg U_2)$ Beseitigung der Annahme
 1+14. $\neg \neg U_1 \rightarrow \neg(\neg U_1 \wedge \neg U_2)$ Ded.Th. aus 1+13.
 1+15. $\neg \neg U_2$ Annahme
 :
 1+16. $\neg(\neg U_1 \wedge \neg U_2)$ folgt aus 1+15. analog oben
 1+25. $\neg \neg U_2 \vdash \neg(\neg U_1 \wedge \neg U_2)$ Beseitigung der Annahme
 1+26. $\neg \neg U_2 \rightarrow \neg(\neg U_1 \wedge \neg U_2)$ mit Ded.Th. aus 1+25.
 1+27. U_1 Annahme
 1+28. $(\neg U_1 \rightarrow U_1) \rightarrow ((\neg U_1 \rightarrow \neg U_1) \rightarrow \neg \neg U_1)$ Ax. 7.
 1+29. $U_1 \rightarrow (\neg U_1 \rightarrow U_1)$ Ax. 1a.
 1+30. $\neg U_1 \rightarrow U_1$ mit S.2. aus 1+28. und 1+29.
 1+31. $(\neg U_1 \rightarrow \neg U_1) \rightarrow \neg \neg U_1$ mit S.2. aus 1+28. und 1+30.
 :
 1+38. $\neg U_1 \rightarrow \neg U_1$ analog 26.6.1b)
 1+39. $\neg \neg U_1$ mit S.2. aus 1+31. und 1+38.
 1+40. $U_1 \vdash \neg \neg U_1$ Beseitigung der Annahme
 1+41. $U_1 \rightarrow \neg \neg U_1$ mit Ded.Th. aus 1+40.
 1+42. $(U_1 \rightarrow \neg \neg U_1) \rightarrow ((U_1 \rightarrow (\neg \neg U_1 \rightarrow (U_1 \rightarrow U_2))) \rightarrow (U_1 \rightarrow (U_1 \rightarrow U_2)))$ Ax. 1b.
 1+43. $(U_1 \rightarrow (\neg \neg U_1 \rightarrow \neg(\neg U_1 \wedge \neg U_2))) \rightarrow (U_1 \rightarrow \neg(\neg U_1 \wedge \neg U_2))$ mit S.2. aus 1+41. und 1+42.
 1+44. $(\neg \neg U_1 \rightarrow \neg(\neg U_1 \wedge \neg U_2)) \rightarrow (U_1 \rightarrow (\neg \neg U_1 \rightarrow \neg(\neg U_1 \wedge \neg U_2)))$ Ax. 1a.
 1+45. $U_1 \rightarrow (\neg \neg U_1 \rightarrow \neg(\neg U_1 \wedge \neg U_2))$ mit S.2. aus 1+14. und 1+44.
 1+46. $U_1 \rightarrow \neg(\neg U_1 \wedge \neg U_2)$ mit S.2. aus 1+43 und 1+45.
 :
 1+65. $U_2 \rightarrow \neg(\neg U_1 \wedge \neg U_2)$ analog
 1+66. $(U_1 \rightarrow \neg(\neg U_1 \wedge \neg U_2)) \rightarrow ((U_2 \rightarrow \neg(\neg U_1 \wedge \neg U_2)) \rightarrow (U_1 \vee U_2 \rightarrow \neg(\neg U_1 \wedge \neg U_2)))$ Ax. 6.

- 1+67. $(U_2 \rightarrow \neg(\neg U_1 \wedge \neg U_2)) \rightarrow (U_1 \vee U_2 \rightarrow \neg(\neg U_1 \wedge \neg U_2))$
mit S.2. aus 1+46. und 1+66.
- 1+68. $U_1 \vee U_2 \rightarrow \neg(\neg U_1 \wedge \neg U_2)$ mit S.2. aus 1+65. und 1+67.
- 1+69. $(U_1 \vee U_2) \vee \neg(U_1 \vee U_2)$ Ax. 9a.
- 1+70. $(U_1 \vee U_2) \vee \neg(U_1 \vee U_2) \rightarrow ((U_1 \vee U_2 \rightarrow \neg U_1 \wedge \neg U_2) \rightarrow ((U_1 \vee U_2 \rightarrow \neg(\neg U_1 \wedge \neg U_2)) \rightarrow \neg(U_1 \vee U_2)))$ Ax. 7.
- 1+71. $(U_1 \vee U_2 \rightarrow \neg U_1 \wedge \neg U_2) \rightarrow ((U_1 \vee U_2 \rightarrow \neg(\neg U_1 \wedge \neg U_2)) \rightarrow \neg(U_1 \vee U_2))$ mit S.2. aus 1+69. und 1+70.
- 1+72. $(U_1 \vee U_2 \rightarrow \neg(\neg U_1 \wedge \neg U_2)) \rightarrow \neg(U_1 \vee U_2)$
mit S.2. aus 1+2. und 1+71.
- 1+73. $\neg(U_1 \vee U_2)$ mit S.2. aus 1+68. und 1+72.

2. $IB(U_1) = 1$ und $IB(U_2) = 0, 1, 2$ d.h. $IB(C) = 1$

1. U_1 nach Vor.
2. $U_1 \rightarrow U_1 \vee U_2$ Ax. 5a.
3. $U_1 \vee U_2$ mit S.2. aus 1. und 2.

3. $IB(U_1) = 0, 2$ und $IB(U_2) = 1$ d.h. $IB(C) = 1$

1. U_2 nach Vor.
2. $U_2 \rightarrow U_1 \vee U_2$ Ax. 5b.
3. $U_1 \vee U_2$ mit S.2. aus 1. und 2.

c) Angenommen, C hat die Gestalt $U_1 \rightarrow U_2$:

1. $IB(U_1) = 0$ und $IB(U_2) = 0, 1, 2$ d.h. $IB(C) = 1$
 $IB(U_1) = 2$ und $IB(U_2) = 0, 1, 2$ d.h. $IB(C) = 1$

1. $A \wedge \neg U_1$ nach Vor. ($A \equiv U_1$ oder $A \equiv \neg U_1$)
2. $A \wedge \neg U_1 \rightarrow (U_1 \rightarrow U_2)$ Ax. 11.
3. $U_1 \rightarrow U_2$

2. $IB(U_1) = 1$ und $IB(U_2) = 0, 2$ d.h. $IB(C) = 0$

Nach Voraussetzung sind also U_1 und A U_1 herleitbar, wobei A für U_1 oder $\neg U_1$ steht.

1. U_1 nach Vor.
2. $U_1 \rightarrow U_2 \vdash U_1 \rightarrow U_2$
3. $U_1 \rightarrow U_2 \vdash U_2$ mit S.2. aus 1. und 2.
4. $(U_1 \rightarrow U_2) \rightarrow U_2$ mit Ded.Th. aus 4.

5. $U_2 \rightarrow U_2 \vee \neg U_2$ Ax. 5b.
 6. $U_1 \rightarrow U_2 \vdash U_2 \vee \neg U_2$ mit S.2. aus 3. und 5.
 7. $U_2 \vee \neg U_2 \rightarrow (A \wedge \neg U_2 \rightarrow \neg U_2)$ Ax. 4b.
 8. $U_1 \rightarrow U_2 \vdash A \wedge \neg U_2 \rightarrow \neg U_2$ mit S.2. aus 6. und 7.
 9. $A \wedge \neg U_2$ nach Vor.
 10. $U_1 \rightarrow U_2 \vdash \neg U_2$ mit S.2. aus 8. und 9.
 11. $(U_1 \rightarrow U_2) \rightarrow \neg U_2$ mit Ded.Th. aus 10.
 12. $((U_1 \rightarrow U_2) \rightarrow U_2) \rightarrow (((U_1 \rightarrow U_2) \rightarrow \neg U_2) \rightarrow \neg (U_1 \rightarrow U_2))$
Ax. 7.
 13. $((U_1 \rightarrow U_2) \rightarrow \neg U_2) \rightarrow \neg (U_1 \rightarrow U_2)$ mit S.2. aus 4., 12.
 14. $\neg (U_1 \rightarrow U_2)$ mit S.2. aus 11. und 13.
3. $IB(U_1)$ und $IB(U_2)$ haben den Wert 1, d.h. $IB(C) = 1$
1. U_2 nach Vor.
 2. $U_2 \rightarrow (U_1 \rightarrow U_2)$ Ax. 1a.
 3. $U_1 \rightarrow U_2$ mit S.2. aus 1. und 2.

$j = h+1$:

Für h sei die Behauptung wahr (Induktionsvoraussetzung)

a) Angenommen, C hat die Gestalt $A \wedge B$:

1. A und B sind herleitbar. Mit Ax. 3. erhält man $A \wedge B$. Es gilt $IB(A \wedge B) = 1$.
2. $\neg A$ und B sind herleitbar. $(A \wedge B)$ erhält man analog a)1. des Induktionsanfanges. Es gilt $IB(A \wedge B) = 0$.
3. $\neg A$ und $\neg B$ sind herleitbar. Analog 2.
4. A und $\neg B$ sind herleitbar. Analog a)2. des Induktionsanfanges. Es gilt $IB(A \wedge B) = 0$.

b) Angenommen, C hat die Gestalt $A \vee B$:

1. A und B sind herleitbar. $IB(A) = 1$ und $IB(B) = 1$.
Mit Ax. 5a. erhält man $A \vee B$. Es gilt $IB(C) = 1$.
2. $\neg A$ und B sind herleitbar. $IB(A) = 0$ und $IB(B) = 1$.
Mit Ax. 5b. erhält man $A \vee B$. Es gilt $IB(A \vee B) = 1$.
3. $\neg A$ und $\neg B$ sind herleitbar. $IB(A) = 0$ und $IB(B) = 0$.
Analog b)1.I.A. erhält man $\neg(A \vee B)$. Es gilt $IB(C) = 0$.

4. A und $\neg B$ sind herleitbar. $IB(A) = 1$ und $IB(B) = 0$.
Mit Ax. 5a. erhält man $A \vee B$. Es gilt $IB(C) = 1$.

c) Angenommen, C hat die Gestalt $A \rightarrow B$:

1. A und B sind herleitbar. $IB(A) = 1$ und $IB(B) = 1$.
Mit Ax. 1a. erhält man $A \rightarrow B$. Es gilt $IB(C) = 1$.
2. $\neg A$ und B sind herleitbar. $IB(A) = 0$ und $IB(B) = 1$.
Mit Ax. 1a. erhält man $A \rightarrow B$. Es gilt $IB(C) = 1$.
3. $\neg A$ und $\neg B$ sind herleitbar. $IB(A) = 0$ und $IB(B) = 0$.
Mit Ax. 11. erhält man $A \rightarrow B$. Es gilt $IB(C) = 1$.
4. A und $\neg B$ sind herleitbar. $IB(A) = 1$ und $IB(B) = 0$.
Analog c)2.I.A. erhält man $\neg(A \rightarrow B)$. Es gilt $IB(C) = 0$.

d) Angenommen, C hat die Gestalt $\neg A$:

1. A ist herleitbar. $IB(A) = 1$. Aus $A \rightarrow \neg A$ (vgl.b)1. I.A.) erhält man $\neg A$, damit $\neg C$. Es gilt $IB(C) = 0$.
2. $\neg A$ ist herleitbar. $IB(A) = 0$. Damit ist C selbst herleitbar. Es gilt $IB(C) = 1$.

Lemma 2: Gilt für jede Belegung IB der Aussagenvariablen $U_1, \dots, U_n$ der Formel C, daß aus der Herleitbarkeit der jeweiligen $A_1, \dots, A_n$ die Herleitbarkeit von C folgt, so gilt:

$$U_1 \vee \neg U_1 \vee (U_1 \wedge \neg U_1) \rightarrow (\dots (U_n \vee \neg U_n \vee (U_n \wedge \neg U_n) \rightarrow C) \dots)$$

Beweis:

Verringerung der Prämissen durch Anwendung des Deduktions-theorems und dann Einführung der Adjunktion durch Ax. 6., bis alle Prämissen beseitigt sind.

Damit läßt sich jetzt der Vollständigkeitssatz beweisen: Aus der Allgemeingültigkeit der Formel C folgt, daß C bei keiner Belegung den Wert 0 erhält und damit, daß $A_1, \dots, A_n \vdash C$ für jede Belegung gilt. Mit Lemma 2 folgt daraus für die Aussagenvariablen $U_1, \dots, U_n$ von C:

$$U_1 \vee \neg U_1 \vee (U_1 \wedge \neg U_1) \rightarrow (\dots (U_n \vee \neg U_n \rightarrow (U_n \wedge \neg U_n) \rightarrow C) \dots)$$

Die Formel $U \vee \neg U \vee (U \wedge \neg U)$ lässt sich folgendermaßen herleiten:

Aus der Annahme $\neg(U \vee \neg U \vee (U \wedge \neg U))$ erhält man

$$U \vee \neg U \rightarrow U \vee \neg U \vee (U \wedge \neg U)$$

$$U \vee \neg U \rightarrow \neg(U \vee \neg U \vee (U \wedge \neg U))$$

Damit lässt sich Ax. 7. anwenden, und man erhält

$$\neg(U \vee \neg U) \quad *)$$

Weiterhin folgen aus der Annahme die beiden Formeln

$$\neg(U \vee \neg U) \rightarrow \neg(U \vee \neg U \vee (U \wedge \neg U))$$

$$\neg(U \vee \neg U) \rightarrow U \vee \neg U \vee (U \wedge \neg U)$$

Die letzte der beiden Formeln erhält man aus

$$\neg(U \vee \neg U), \neg(U \wedge \neg U) \vdash U \rightarrow U \vee \neg U$$

$$\text{und } \neg(U \vee \neg U), \neg(U \wedge \neg U) \vdash U \rightarrow \neg(U \vee \neg U)$$

mit Ax. 7. ergibt sich

$$\neg(U \vee \neg U), \neg(U \wedge \neg U) \vdash \neg U$$

Damit gilt

$$\neg(U \vee \neg U) \vdash \neg(U \wedge \neg U) \rightarrow \neg(U \vee \neg U)$$

$$\text{und } \neg(U \vee \neg U) \vdash \neg(U \wedge \neg U) \rightarrow U \vee \neg U$$

Mit Ax. 7. ergibt sich

$$\neg(U \vee \neg U) \vdash \neg(U \wedge \neg U)$$

Mit Ax. 8. und dem Deduktionstheorem erhält man

$$\neg(U \vee \neg U) \rightarrow U \wedge \neg U \quad \text{und daraus}$$

$$\neg(U \vee \neg U) \rightarrow U \vee \neg U \vee (U \wedge \neg U)$$

Aus den beiden obigen Formeln ergibt sich mit Ax. 7.

$$\neg(U \vee \neg U)$$

Daraus und aus *) erhält man die Negation der An-

nahme: $\neg\neg(U \vee \neg U \vee (U \wedge \neg U))$ und damit $U \vee \neg U \vee (U \wedge \neg U)$.

Damit lässt sich die Formel C herleiten.

§ 27. Prädikatenlogik

27.1 Grundzeichen übernehmen wir aus §16.

Neues Mitteilungszeichen: 2 für den Wert "antinomisch".

Die anderen Mitteilungszeichen werden unverändert aus §16 übernommen.

Terme, Nennform, Belegung und $\phi(t)$ werden wie in §16 bzw. §17 definiert.

27.2 Induktive Definition von $\phi(C)$ aus $\{0,1,2\}$ für jede Formel C :

1. $\phi(U) \in \{0,1,2\}$ ist gegeben
2. $\phi(p^n(t_1, \dots, t_n)) = 1$, wenn $(\phi(t_1), \dots, \phi(t_n)) \in \phi(p^n)$
 $= 2$, wenn $(\phi(t_1), \dots, \phi(t_n)) \in \phi(p^n)$
 und $(\phi(t_1), \dots, \phi(t_n)) \notin \phi(p^n)$
 $= 0$ sonst
3. $\phi(\neg A) = 0$, wenn $\phi(A) = 1$
 1 , wenn $\phi(A) = 0$
 2 , wenn $\phi(A) = 2$
4. $\phi(A \wedge B) = 0$, wenn $\phi(A) = 0$ oder $\phi(B) = 0$
 1 , wenn $\phi(A) = 1$ und $\phi(B) = 1$
 2 nie
5. $\phi(A \vee B) = 0$, wenn $\phi(A) = 0$ und $\phi(B) = 0$
 1 , wenn $\phi(A) = 1$ oder $\phi(B) = 1$
 2 nie
6. $\phi(A \rightarrow B) = 0$, wenn $\phi(A) = 1$ und $\phi(B) = 0, 2$
 1 sonst
 2 nie
7. $\phi(\bigwedge x \tilde{S}(x)) = 0$, wenn $\phi(\tilde{S}[\alpha]) = 0$ für mindestens ein $\alpha \in I$
 $= 1$, wenn $\phi(\tilde{S}[\alpha]) = 1, 2$ für alle $\alpha \in I$
 $= 2$ nie
8. $\phi(\bigvee x \tilde{S}(x)) = 1$, wenn $\phi(\tilde{S}[\alpha]) = 1$ für mindestens ein $\alpha \in I$
 $= 0$, wenn $\phi(\tilde{S}[\alpha]) = 0, 2$ für alle $\alpha \in I$
 $= 2$ nie

27.3 Axiome:

1. Die Axiome der Aussagenlogik (26.4)

2. Alle Formeln der Gestalt

- 1) $\mathcal{F}(v) \vee \neg \mathcal{F}(v) \rightarrow (\bigwedge x \mathcal{F}(x) \rightarrow \mathcal{F}(v))$
- 2) $\mathcal{F}(v) \rightarrow \bigvee x \mathcal{F}(x)$

17.4 Grundschiußregeln:

1. "modus ponens": $A, A \rightarrow B \vdash B$ (S.2.)
2. " $\wedge$ -Regel" : $A \rightarrow \mathcal{F}(v) \vdash A \rightarrow \bigwedge x \mathcal{F}(x)$
3. " $\vee$ -Regel" : $\mathcal{F}(v) \rightarrow B \vdash \bigvee x \mathcal{F}(x) \rightarrow B$

Für 2. und 3. gilt wieder die Variablenbedingung:
Die freie Variable v darf nicht in der Konklusion auftreten!

27.5 Konsistenzsatz: Jede herleitbare Formel ist allgemeingültig.

1. Die Axiome sind allgemeingültig.
 - a) Die aussagenlogischen Axiome sind allgemeingültig.
 - b) Die Formel kann nur dann falsch werden, wenn $\mathcal{F}(v)$ den Wert 2 erhält. Damit erhält aber $\mathcal{F}(v) \vee \neg \mathcal{F}(v)$ den Wert 0, und die ganze Implikation wird wahr.
 - c) Nach 27.2.8 erhält $\bigvee x \mathcal{F}(x)$ niemals den Wert 2. Damit wird die ganze Formel niemals falsch.

(Bei b) und c) wurden nur Bewertungen mit 2 betrachtet, da die anderen Bewertungen schon in §18 geprüft wurden.)

2. Aus der Allgemeingültigkeit der Prämissen eines Grundschlusses folgt die Allgemeingültigkeit der Konklusion.

- a) "modus ponens": klar, siehe Aussagenlogik!
- b) " $\wedge$ -Regel" : Sei $\phi(\bigwedge x \mathcal{F}(x)) = 2$; dann gilt nicht $\phi(\mathcal{F}(v)) = 1$, damit folgt $\phi(A) = 0, 2$ und damit $\phi(A \rightarrow \bigwedge x \mathcal{F}(x)) = 1$.
- c) " $\vee$ -Regel" : analog 18.3

27.6 Wir können nun das Komprehensionsaxiom in seiner uneingeschränkten Form einführen:

$$(r \in \{x : \mathcal{F}(x)\} \rightarrow \mathcal{F}(r)) \wedge (\mathcal{F}(r) \rightarrow r \in \{x : \mathcal{F}(x)\})$$

Die Unschädlichkeit der bekannten antinomischen Mengen zeigt sich leicht:

1. $(R \in R \rightarrow R \notin R) \wedge (R \notin R \rightarrow R \in R)$ (R ist dabei die
Russellsche Klasse)
ist eine erfüllbare Formel
2. Der Satz 2.9, $|M| < |PM|$, läßt sich mit der eingeschränkten Logik nur unter der Voraussetzung, daß M keine echte Klasse ist beweisen.
3. $(\Omega \in 0 \rightarrow \Omega \notin 0) \wedge (\Omega \notin 0 \rightarrow \Omega \in 0)$
ist eine erfüllbare Formel

Nachwort

Die grundlegende Schwierigkeit bei einer Formalisierung der dialektischen Logik, in der Gestalt, wie sie Hegel vorgeschlagen hat, besteht im Auftauchen von Widersprüchen innerhalb des Objektbereiches.

Da das Fortschreiten in Widersprüchen den wesentlichen Grund der Dialektik ausmacht, wurde in dieser Arbeit versucht, ein formallogisches System der Aussagenlogik und Prädikatenlogik zu beschreiben, in welchem das Auftauchen von Widersprüchen nicht zur Herleitbarkeit jeder beliebigen Aussage führt (Inkonsistenz).

LITERATURVERZEICHNIS

=====

- ASENJO, F.G.: (1) A Calculus of Antinomies. Notre Dame Journal Bd. VII 1966.
- GENTZEN, G.: (1) Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. Mathematische Annalen 112, 493 - 565, 1936.
- GÜNTHER, G.: (1) Die Theorie der 'mehrwertigen' Logik. Phil. Perspektiven Bd 3 1971.
- HEGEL, G.W.F.: (1) Phänomenologie des Geistes.
(2) System der Philosophie, Zweiter Teil.
(3) Wissenschaft der Logik, Erster Teil.
(4) System der Philosophie, Erster Teil.
(Bände 2, 9, 4 und 8 der Glockner Ausgabe)
- HEIDEGGER, M.: (1) Sein und Zeit. Tübingen 1967.
- HILBERT, D.: (1) Über das Unendliche. Math. Ann. Bd. 95 1925.
- KANT, I.: (1) Kritik der reinen Vernunft. Felix Meiner Verlag, Hamburg 1956.
(2) Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik. Felix Meiner Verlag, Hamburg 1957.
- KLAUS, G.: (1) Moderne Logik. Berlin 1964.
- KLEENE, S.C. (1) Introduction to Metamathematics. Amsterdam 1952.
- ŁUKASIEWICZ, J.: (1) Farewell Lecture. Edited by L. Borkowski. Amsterdam 1970.
- SCHÜTTE, K.: (1) Mengenlehre. Skriptum der Vorlesung vom Wintersemester 1969/70.
(2) Einführung in die mathematische Logik. Skriptum zur Vorlesung vom Sommersemester 1966.
(3) Beweistheorie. Berlin Göttingen Heidelberg 1960.
- SCHMIDT, J.: (1) Mengenlehre. Mannheim 1966.
- SINOWJEW, A.A.: (1) Über mehrwertige Logik.

STEGMÜLLER, W.: (1) Metaphysik, Skepsis, Wissenschaft.
Heidelberg 1969.

WAERDEN van der, B.L.: (1) Die Beweisführung in den
klassischen Wissenschaften des Altertums.
Darmstadt 1966

WEYL, H.: (1) Philosophie der Mathematik und Natur-
wissenschaft. München 1949.

WITTENBERG, A.: (1) Vom Denken in Begriffen. Basel 1957.

LEBENS LAUF

Name: Uwe Petersen

Geburtstag und -Ort: 27. Juni 1948 in Berlin

Religion: evangelisch-lutherisch

Eltern: Vater: Dr. Heinz

Mutter: Eva-Maria, geb. Müller

Schulbildung: 1954 - 1958 , 4 Klassen Volksschule (Wiesbaden, Mühlheim/R., München); 1958 - 1967 , 9 Klassen am math.-nat. Gymnasium in München

Studiengang: 9 Semester an der Ludwig-Maximilians-Universität in München. Davon 3 Semester Doppelstudium Philosophie/Theologie und 6 Semester Philosophie/Mathematik. In den Anfangssemestern stieß ich in den Seminaren von Herrn Dr. Vuia auf die Frage, ob neben der Existenz oder Nichtexistenz ein Drittes möglich sei. Der Versuch einer Beantwortung dieser Frage ließ mich die Philosophie als ein unfruchtbares Feld sehen. So verlagerte sich meine Arbeit an die mathematische Fakultät, wo ich in der Folgezeit am logischen Seminar die wesentlichen Anregungen für die formale Gestalt meiner Überlegungen erhielt. Herr Professor Krings hat sich freundlicherweise der entstehenden Arbeit angenommen. Im besonderen wurde bei den Herren Anacker, Diller, Essler, Krings, Schütte, Stegmüller und Vuia gehört.

